Yadolah Dodge

# Mathématiques de base pour économistes



Springer

# Mathématiques de base pour économistes

**Springer**

*Paris*
*Berlin*
*Heidelberg*
*New York*
*Barcelone*
*Hong Kong*
*Londres*
*Milan*
*Singapour*
*Tokyo*

Yadolah Dodge

# Mathématiques de base pour économistes

Springer

**Yadolah Dodge**
Professeur honoraire
Université de Neuchâtel
Suisse
yadolah.dodge@unine.ch

---

ISBN : 978-2-287-74940-7 Springer Paris Berlin Heidelberg New York


Imprimé en France

Springer-Verlag France est membre du groupe BertelsmannSpringer Science + Business Media GmbH



Couverture : Jean-François Montmarché

Dédié à la mémoire de Naser, mon frère.

# Table des matières


**I Analyse** **1**

**1 Prologue** **3**

1.1 Introduction . . . . . 3
1.2 Les ensembles . . . . . 4
1.3 Opérations sur les ensembles . . . . . 5
1.4 Produit cartésien et cardinalité . . . . . 7
1.5 Les variables . . . . . 9
1.6 Relations et fonctions . . . . . 10
1.7 Fonction inverse . . . . . 15
1.8 Fonctions explicites et implicites . . . . . 15

**2 Représentation graphique des fonctions** **21**

2.1 Introduction . . . . . 21
2.2 Coordonnées cartésiennes . . . . . 21
2.3 Les droites . . . . . 22
2.4 Applications économiques des droites . . . . . 26
2.5 Différents types de fonctions . . . . . 31
2.6 Applications économiques des fonctions . . . . . 39

**3 Suites, limites et première dérivée** **47**

3.1 Introduction . . . . . 47
3.2 Suites . . . . . 48
3.3 Convergence et divergence des suites . . . . . 51
3.4 Limite d'une fonction . . . . . 56
3.5 Propriétés de la limite d'une fonction . . . . . 62
3.6 Quelques limites importantes . . . . . 64
3.7 Continuité des fonctions . . . . . 65
3.8 Types de discontinuité . . . . . 66

3.9 Propriétés des fonctions continues . . . . . . . . . . . . . . . . . 69
3.10 Définition de la première dérivée . . . . . . . . . . . . . . . . . . 70
3.11 Règle générale de dérivation . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 72
3.12 Interprétation géométrique de la première dérivée . . . . . . . 73
3.13 Dérivées des fonctions algébriques . . . . . . . . . . . . . . . . . 76
3.14 Les différentielles . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 79

**4 Applications des dérivées 87**
4.1 Introduction . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 87
4.2 Croissance et décroissance des fonctions . . . . . . . . . . . . . 87
4.3 Minima et maxima des fonctions . . . . . . . . . . . . . . . . . . 89
4.4 Courbure des fonctions . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 93
4.5 Points d'inflexion des fonctions . . . . . . . . . . . . . . . . . . 97
4.6 Formes indéterminées . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 99
4.7 Étude complète d'une fonction . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 104
4.8 Applications économiques des dérivées . . . . . . . . . . . . . . 113

**5 Intégrales 121**
5.1 Introduction . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 121
5.2 Intégrale indéfinie . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 121
5.3 Table d'intégrales . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 123
5.4 Intégration par changement de variable . . . . . . . . . . . . . . 125
5.5 Intégration par parties . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 126
5.6 Applications économiques des intégrales indéfinies . . . . . . . 128
5.7 Intégrale définie . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 130
5.8 Intégrales impropres . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 141
5.9 Applications économiques des intégrales définies . . . . . . . . 142

**6 Les séries 153**
6.1 Introduction . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 153
6.2 Définitions . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 153
6.3 Démonstration par récurrence (induction) . . . . . . . . . . . . 155
6.4 Convergence et divergence d'une série . . . . . . . . . . . . . . . 156
6.5 Séries géométriques . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 158
6.6 Séries à termes positifs . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 160
6.7 Séries alternées . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 165
6.8 Convergence absolue . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 167

6.9 Séries de puissances . . . 170
6.10 Série de Maclaurin . . . 175
6.11 Série de Taylor . . . 178

**7 Fonctions de plusieurs variables 185**
7.1 Introduction . . . 185
7.2 Définitions . . . 186
7.3 Représentations graphiques des fonctions de deux variables . . 187
7.4 Dérivées partielles . . . 189
7.5 Applications économiques des dérivées partielles . . . 193
7.6 Minima et maxima d'une fonction de deux variables . . . 195
7.7 Multiplicateurs de Lagrange . . . 200
7.8 Applications économiques des multiplicateurs de Lagrange . . 202
7.9 Intégrales doubles et multiples . . . 205

## II Algèbre linéaire 213

**8 Calcul matriciel 215**
8.1 Introduction . . . 215
8.2 Matrices . . . 215
8.3 Addition de matrices . . . 216
8.4 Multiplication des matrices . . . 218
8.5 Multiplication d'une matrice par un scalaire . . . 220
8.6 Transposée d'une matrice . . . 221
8.7 Différents types de matrices . . . 222
8.8 Trace d'une matrice carrée . . . 225
8.9 Partition des matrices . . . 226
8.10 Déterminant d'une matrice . . . 230
8.11 Propriétés du déterminant . . . 234
8.12 Inverse d'une matrice . . . 235
8.13 Inverse d'une matrice partagée . . . 238

**9 Systèmes d'équations linéaires 245**
9.1 Introduction . . . 245
9.2 Rang d'une matrice . . . 245
9.3 Transformations élémentaires . . . 247
9.4 Systèmes d'équations linéaires . . . 251

**10 Vecteurs et espaces vectoriels** **267**
10.1 Introduction . . . 267
10.2 Les vecteurs . . . 267
10.3 Interprétation géométrique des vecteurs . . . 268
10.4 Longueur d'un vecteur . . . 270
10.5 Produit scalaire de deux vecteurs . . . 271
10.6 Vecteurs orthogonaux . . . 272
10.7 Dépendance linéaire . . . 273
10.8 Combinaison linéaire . . . 275
10.9 Propriétés des vecteurs . . . 276
10.10 Espaces vectoriels . . . 276
10.11 Bases . . . 278
10.12 Valeurs et vecteurs propres . . . 282
10.13 Diagonalisation de matrices carrées . . . 286

**11 Approche matricielle du calcul différentiel** **293**
11.1 Introduction . . . 293
11.2 Calcul différentiel sous forme matricielle . . . 293
11.3 Matrice hessienne . . . 297
11.4 Matrice hessienne bordée . . . 306

**III Mathematica** **319**

**12 Introduction à Mathematica** **321**
12.1 Introduction . . . 321
12.2 Le logiciel . . . 322
12.3 Visualisation de fonctions . . . 323
12.4 Calculatrice numérique . . . 326
12.5 Calculatrice analytique . . . 327
12.6 Définition d'une fonction . . . 330

**13 Épilogue** **335**

**14 Quelques corrigés d'exercices** **339**

# Préface

Ce livre contient des éléments fondamentaux de mathématiques et est destiné aux étudiants de première année en sciences économiques, gestion, finance et sciences sociales. Son contenu est de ce fait conforme aux besoins mathématiques des matières enseignées dans ces branches. Ce livre est également un lien entre les cours élémentaires d'économie, de statistique et de recherche opérationnelle.

Il est essayé dans ce livre d'enseigner les éléments de base des mathématiques avec des exemples, chaque fois que cela est possible. Ce texte est écrit pour ceux qui ont peu de connaissances en mathématiques. Il contient néanmoins les éléments nécessaires et suffisants pour aborder la deuxième année du degré universitaire. De courtes démonstrations sont données tout au long du livre. Toutefois, les références citées à la fin du livre sont suffisantes pour qu'un lecteur intéressé puisse approfondir les sujets traités.

Ce livre est composé de treize chapitres regroupés en trois parties et présentés avec de nombreux exemples. Dans la partie analyse, le chapitre 1 présente quelques éléments essentiels de la théorie des ensembles, des variables et des relations entre les variables. Ces concepts de base sont indispensables pour la suite du cours. Le chapitre 2 considère la représentation graphique des équations algébriques permettant une visualisation des relations entre les variables. Le chapitre 3 aborde le domaine du calcul différen-

tiel. Les notions de suites, limites et première dérivée y sont expliquées. Le chapitre 4 traite des applications des dérivées, c'est-à-dire de ce qu'on peut étudier à l'aide des dérivées. Le chapitre 5 considère l'opération inverse de la dérivée à savoir l'intégration. L'intégration est utile notamment pour calculer l'aire qui se situe sous une courbe. Le chapitre 6 aborde les séries mathématiques. Les fonctions vues jusqu'au chapitre 6 sont toutes des fonctions d'une seule variable. Le chapitre 7 donne quelques éléments concernant les fonctions de deux ou plusieurs variables et leurs applications, notamment dans le domaine économique. Le chapitre 8 introduit la partie d'algèbre linéaire et fournit les éléments de base du calcul matriciel en présentant différents types de matrices et quelques opérations usuelles sur celles-ci. Une application du calcul matriciel est la résolution de systèmes d'équations linéaires et fait l'objet du chapitre 9. Le chapitre 10 traite des vecteurs et espaces vectoriels alors que le chapitre 11 aborde le calcul différentiel sous forme matricielle (matrice hessienne). La 3e partie est constituée d'un chapitre sur un logiciel mathématique puissant : *Mathematica*® qui permet de résoudre tous les problèmes exposés dans ce livre. Finalement, une page historique est présentée dans le chapitre 13.

Je tiens à remercier vivement Sylvie Gonano pour son étroite collaboration à la rédaction du manuscrit qui est à l'origine de la première édition (1987). Depuis, ce livre a été édité par "*Presses Académiques Neuchâtel*" en 1989 et en 1996. Ce manuscrit a servi de support au cours de mathématiques dispensé aux étudiants en sciences économiques et sociales de l'Université de Neuchâtel. Le livre actuel résulte de modifications et d'ajouts appportés au manuscrit original. Pour ce travail essentiel, j'exprime ma gratitude à mes collaborateurs : Arash Dodge, Gérard Geiser, François Lefebvre, Tatiana Mantuano, Alexandra Fragnière, et particulièrement à Gérard Antille qui a accompli un très grand travail de correction et de vérification du texte et des commentaires. Enfin, les parties historiques du chapitre 13 sont le fruit de discussions avec Farhad Mehran.

Yadolah Dodge
Université de Neuchâtel
30 Mars 2002

# Partie I

# Analyse

# Chapitre 1

# Prologue

| | |
|---|---|
| Moi : | *De quel côté est le chemin ?* |
| Le Sage : | *De quelque côté que tu ailles, si tu es un vrai pèlerin, tu accompliras le voyage.* |
| SOHRAVARDI : | *(1155-1191) Philosophe persan.* |

## 1.1 Introduction

L'objectif de cet ouvrage est d'aider le lecteur à comprendre, apprécier et appliquer l'analyse mathématique. Les mathématiques permettent à l'économiste d'être précis dans la définition des variables, de poser clairement les hypothèses, d'être logique dans le développement de l'analyse et de prendre en considération un nombre plus important de variables.

Dans ce chapitre, nous allons revoir quelques notions fondamentales de la théorie des ensembles, des variables et des relations entre ces variables. Ces concepts de base, bien qu'évidents, sont très importants. Nous insisterons notamment sur les fonctions, outils fondamentaux nécessaires à la théorie économique.

## 1.2 Les ensembles

Georg Ferdinand Cantor, né en 1845 à Saint-Petersbourg en Russie, fonda la théorie des ensembles et introduisit le concept des nombres infinis avec sa découverte des nombres cardinaux. Il développa aussi l'étude concernant les séries trigonométriques et fut le premier à prouver que les nombres réels sont indénombrables.

Un **ensemble** est une collection d'objets bien déterminés. On appelle ces objets les **éléments** de l'ensemble.

Un ensemble est défini soit par une liste de ses éléments, soit par une règle qui définit les éléments de l'ensemble. On utilisera les majuscules pour représenter un ensemble, et il est d'usage de noter les éléments à l'intérieur d'accolades.

**Exemple 1.1** *$A = \{1, 2, 3\}$ signifie que l'ensemble $A$ contient les éléments 1,2 et 3. $B = \{x : x \text{ est un nombre impair}\}$ signifie que l'ensemble $B$ contient tous les nombres entiers impairs, à savoir $\pm 1$, $\pm 3$, $\pm 5$, $\pm 7$, etc.*

L'appartenance à un ensemble se note par le signe $\in$, la non-appartenance se note par $\notin$. Un ensemble ne contenant aucun élément se note par $\emptyset$ et se lit **ensemble vide**, par exemple, $S = \{\ x\colon\ x$ est un nombre impair se terminant par 4 $\} = \emptyset$. Si chaque élément de A se trouve aussi dans $B$, $A$ est un **sous-ensemble** de $B$; on note $A \subseteq B$. S'il existe dans $B$ au moins un élément qui n'appartient pas à $A$, on dit que $A$ est **sous-ensemble propre** de $B$ et on le note $A \subset B$. La notation $A \nsubseteq B$ signifie que $A$ n'est pas un sous-ensemble de $B$. Par définition, deux ensembles sont égaux si $A \subseteq B$ et $B \subseteq A$.

Sauf mention contraire, tous les ensembles considérés sont des sous-ensembles d'un certain ensemble qu'on appelle **ensemble universel** et qui sera noté par $\Omega$.

**Exemple 1.2** *Si $A = \{1, 2, 3\}$ et $B = \{1, 2, 3, 4\}$, $A$ est un sous-ensemble propre de $B$: $A \subset B$.*
*Si $A = \{x : x \text{ est un multiple de } 3\}$ et $B = \{x\colon\ x \text{ est un multiple de } 6\}$, alors $B$ est un sous-ensemble propre de $A$: $B \subset A$.*
*Si $A = \{0.1, 0.4, 0.6, 0.8\}$ et $B = \{x : x \text{ est un nombre entier}\}$, $A$ n'est pas un sous-ensemble de $B$: $A \nsubseteq B$.*

Par la suite, les ensembles numériques fondamentaux seront notés par :

$\mathbb{N}$ = $\{0, 1, 2, 3, \ldots\}$, l'ensemble des entiers naturels.
$\mathbb{Z}$ = $\{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$, l'ensemble des entiers relatifs.
$\mathbb{Q}$ = $\{\frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{Z} n \neq 0\}$, l'ensemble des nombres rationnels.
$\mathbb{R}$ pour l'ensemble des nombres réels.

Notons que : $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

**Exemple 1.3** *Les intervalles de $\mathbb{R}$ sont très souvent utilisés en mathématique. Soit $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$; ces intervalles sont notés ainsi :*

$]a;b[ \;=\; \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$ : *intervalle ouvert.*
$[a;b] \;=\; \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$ : *intervalle fermé.*
$]a;b] \;=\; \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$ : *intervalle semi-ouvert (à gauche).*
$[a;b[ \;=\; \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$ : *intervalle semi-ouvert (à droite).*

## 1.3 Opérations sur les ensembles

**Définition 1.1** *La **réunion** de deux ensembles A et B est le nouvel ensemble consistant en la réunion des éléments de A et des éléments de B. La réunion de A et B, notée $A \cup B$ , qui se lit "A union B" est définie comme suit :*
*$A \cup B = \{x : x \in A$ ou $x \in B\}$.*

*Le terme "ou" est employé ici dans le sens de et/ou.*

**Exemple 1.4** *Si $A = \{1, 3, 5\}$ et $B = \{2, 3, 4\}$, alors $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. On notera que l'élément 3 qui se trouve dans A et dans B n'est pas répété dans $A \cup B$.*

**Définition 1.2** *L'**intersection** de deux ensembles A et B est le nouvel ensemble formé des éléments communs à A et B. L'intersection de A et B, notée $A \cap B$ est définie par : $A \cap B = \{x :\ x \in A$ et $x \in B\}$.*

**Exemple 1.5** *Si $A = \{x :$ x est un multiple de $4\}$ et $B = \{x :$ x est un multiple de $6\}$, alors $A \cap B = \{x :$ x est un multiple de $12\}$.*

**Définition 1.3** *La **différence** entre deux ensembles A et B est le nouvel ensemble formé des éléments qui appartiennent à B mais pas à A. La différence entre B et A, notée $B - A$, est définie par :*

*$B - A = \{x :\ x \in B$ et $x \notin A\}$.*

**Exemple 1.6** *Si* $A = \{1, 2, 3\}$ *et* $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B - A = \{4, 5\}$.

**Définition 1.4** *Le* ***complémentaire*** *d'un ensemble A est le nouvel ensemble formé des éléments qui n'appartiennent pas à A. Le complémentaire de A, noté* $\overline{A}$ *, est défini par :* $\overline{A} = \{x :\ x \in \Omega \text{ et } x \notin A\ \}$.

À titre d'exemple, démontrons que l'intersection est **distributive** par rapport à la réunion, propriété que l'on peut énoncer sous la forme d'un théorème.

**Théorème 1.1** *Quels que soient les ensembles A,B et C, alors :*

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C).$$

**Démonstration**

Il s'agit de démontrer que tout élément de l'ensemble A∩(B∪C) appartient à l'ensemble (A∩B)∪(A∩C), puis que tout élément de (A∩B)∪(A∩C) appartient à A∩(B∪C) ; ainsi, par définition, les deux ensembles seront égaux.

Soit $x$ un élément de A∩(B∪C). Cet élément appartient à A d'une part et d'autre part à l'un au moins des ensembles B et C. Par conséquent, ou bien $x$ appartient à A et à B, donc à A∩B ou bien $x$ appartient à A et à C, donc à (A∩C) ; $x$ appartient donc à l'ensemble (A∩B)∪(A∩C).

Soit $x$ un élément de (A∩B)∪(A∩C). Si $x$ n'appartient pas à (A∩B), il appartient forcément à (A∩C), donc à A et à C. Si $x$ n'appartient pas à (A∩C), il appartient nécessairement à (A∩B), donc à A et à B. Dans les deux cas, $x$ appartient à A d'une part et d'autre part au moins à B ou à C. Donc $x$ appartient à A∩(B∪C). Ce qu'il fallait démontrer (c.q.f.d).

Démontrons le même théorème, mais cette fois sous forme plus concise :

$$x \in \mathrm{A} \cap (\mathrm{B} \cup \mathrm{C}) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} x & \in & \mathrm{A} \\ \text{et } x & \in & \mathrm{B} \cup \mathrm{C} \end{array} \right.$$

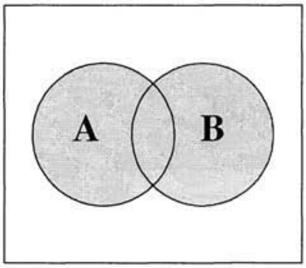
$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} x & \in & \mathrm{A} \\ \text{et } (x & \in & \mathrm{B} \text{ ou } x \in \mathrm{C}) \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{r} (x \in \mathrm{A} \quad \text{et} \quad x \in \mathrm{B}) \\ \text{ou } (x \in \mathrm{A} \quad \text{et} \quad x \in \mathrm{C}) \end{array} \right.$$

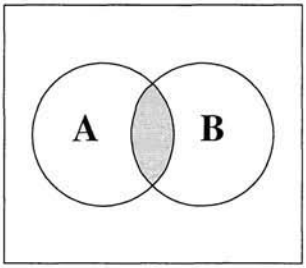
$$\Leftrightarrow x \in (\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) \cup (\mathrm{A} \cap \mathrm{C})$$

c.q.f.d.

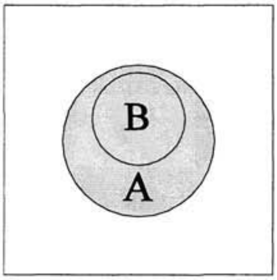
On peut représenter les ensembles et les opérations sur ces ensembles à l'aide de diagrammes qu'on appelle diagrammes de Venn. La surface grisée représente l'ensemble indiqué en-dessous de chaque diagramme.



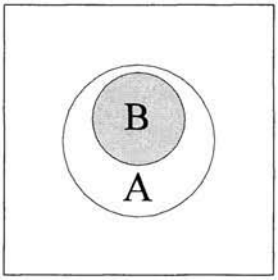

$A \cup B$



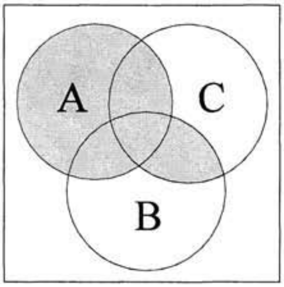

$A \cap B$



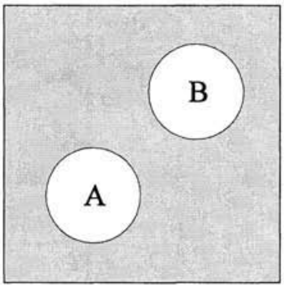

$A \cup B = A$




$A \cap B = B$




$A \cup ( B \cap C )= ( A \cup B ) \cap ( A \cup C )$




$\overline{A \cup B}= \overline{A} \cap \overline{B}$

## 1.4 Produit cartésien et cardinalité

René du Perron Descartes (1596-1650), né en France dans la province de Touraine, fut philosophe, mathématicien et scientifique. Son idée selon laquelle

l'algèbre pouvait être utilisée comme méthode générale pour la géométrie le fit passer pour le fondateur de la géométrie analytique. Dans le domaine de la notation, il introduisit le système des exposants ($x^2$,$x^3$,...) et commença à utiliser les premières lettres de l'alphabet pour se référer à des quantités connues et les dernières lettres pour représenter les inconnues.

On appelle **produit cartésien** de deux ensembles E et F, l'ensemble des **couples ordonnés** $(x; y)$ où $x \in$ E et $y \in$ F. On le note E×F et on lit "E croix F". Les éléments $(x; y)$ sont des couples ordonnés et non des ensembles. L'ordre dans lequel on écrit $x$ et $y$ est fondamental. Le premier élément $x$ du couple appartient au premier ensemble et le deuxième élément au deuxième ensemble.

**Définition 1.5** *Un ensemble est dit **fini** s'il contient un nombre fini d'éléments. Le nombre d'éléments d'un ensemble s'appelle **cardinal** de l'ensemble. On le note Card(E). Un ensemble qui n'est pas fini est dit infini.*

**Exemple 1.7** *Si* $A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ *et* $B = \{1, 3, 5\}$, *alors il y aura* $5 \cdot 3 = 15$ *éléments dans* $A \times B$*:* $(0; 1), (0; 3), (0; 5), (1; 1), \ldots, (4; 3), (4; 5)$. *De façon plus générale, **si A et B sont des ensembles finis, alors :** **Card(A×B) = Card(A)·Card(B).***

**Définition 1.6** *Soit un ensemble E. Tous les sous-ensembles de E peuvent être considérés comme les éléments d'un nouvel ensemble que l'on appelle **ensemble des parties** de l'ensemble E, noté* $\mathcal{P}(E)$.

**Exemple 1.8** *Soit E = {a,b,c}. Les sous-ensembles de E sont:* $\emptyset$,{a}, {b}, {c}, {a,b}, {a,c}, {b,c}, {a,b,c}.
*Ainsi:* $\mathcal{P}(E)=\{\emptyset,\{a\},\{b\},\{c\},\{a,b\}, \{a,c\},\{b,c\},\{a,b,c\}\}$.
*On notera que* $Card(\mathcal{P}(E)) = 2^3 = 8$.

Plus généralement, si E contient $n$ éléments, $\mathcal{P}$(E) contiendra $2^n$ éléments.

**Théorème 1.2** *Soient A et B deux parties d'un ensemble fini E, alors:*
**Card(A∪B) + Card(A∩B) = Card(A) + Card(B).**

**Démonstration**
Le nombre d'éléments de "A union B" est égal au nombre d'éléments de A plus le nombre d'éléments de B auquel on retranche le nombre d'éléments en

commun à A et B, car ils ont été comptés deux fois, d'où :
Card(A∪B) = Card(A) + Card(B) − Card(A∩B). c.q.f.d.

Si A∩B = ∅, alors on obtient la formule :

$$Card(A \cup B) = Card(A) + Card(B).$$

## 1.5 Les variables

Il s'agit de distinguer deux sortes de quantités : les **constantes** et les **variables**. Une constante est une quantité prenant une valeur fixe. Les **constantes numériques** gardent la même valeur dans tous les problèmes. Les **constantes arbitraires** ou **paramètres** gardent la même valeur tout au long d'un problème particulier.

La **valeur absolue** d'une constante, notée $\mid c \mid$, représente la grandeur de cette constante sans tenir compte de son signe. Nous avons donc :

$\mid c \mid = \mid -c \mid = c$ si $c$ est non négatif.

$\mid c \mid = \mid -c \mid = -c$ si $c$ est négatif.

Voici quelques propriétés de la valeur absolue :

Soient $c_1$ et $c_2$, deux nombres réels.

i. $\mid c_1 + c_2 \mid \; \leq \; \mid c_1 \mid + \mid c_2 \mid$

ii. $\mid c_1 \cdot c_2 \mid \; = \; \mid c_1 \mid \cdot \mid c_2 \mid$

iii. $\left|\dfrac{c_1}{c_2}\right| = \dfrac{\mid c_1 \mid}{\mid c_2 \mid}, \quad c_2 \neq 0$

iv. Si $\mid c_1 \mid < \mid c_2 \mid$, alors $\dfrac{1}{\mid c_1 \mid} > \dfrac{1}{\mid c_2 \mid}, \quad c_1 \neq 0, c_2 \neq 0.$

Une **variable** est une quantité qui peut prendre différentes valeurs tout au long d'un même problème. Une variable peut être **continue** ou **discrète**. Une variable continue est une variable qui peut prendre n'importe quelle valeur réelle à l'intérieur d'un intervalle. Les valeurs successives d'une variable continue diffèrent d'une quantité infinitésimale. Une variable discrète est une variable qui prend uniquement certaines valeurs dans un intervalle.

Il est d'usage de noter les constantes par les premières lettres de l'alphabet et les variables par les dernières lettres. Toutefois, dans l'application des mathématiques, par exemple en économie, une variable est souvent désignée

par la première lettre de son nom: $p$ pour prix, $q$ pour quantité, $c$ pour coût, etc.

**Exemple 1.9** *Dans l'expression de l'aire du disque $A = \pi r^2$, $\pi$ est une constante numérique, $r$ le rayon et $A$ sont des variables.*

Les variables et les constantes appartiennent à l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$.

Le quotient de deux nombres $a$ et $b$ est égal à un nombre $x$ : $\frac{a}{b} = x$.

On en tire : $a = bx$. En rapport avec cette définition, la division par 0 n'est pas admissible. En effet, si $b = 0$, $a = 0 \cdot x$ qui n'est vrai que si $a = 0$ ; mais dans ce cas, on peut donner à $x$ n'importe quelle valeur. Donc le quotient $\frac{a}{b}$, lorsque $b = 0$ et $a = 0$ peut prendre n'importe quelle valeur. L'expression $\frac{a}{0}$ est appelée **indéfinie** si $a \neq 0$ et l'expression $\frac{0}{0}$ est appelée **indéterminée**.

Notons que $\frac{0}{b} = 0$ pour $b \neq 0$ puisque $\frac{0}{b}$ est la valeur de $x$ pour laquelle $bx = 0$ et que cette valeur doit être nulle quand $b \neq 0$.

# 1.6 Relations et fonctions

Dans la vie courante, nous rencontrons à chaque instant des variables qui dépendent d'autres variables. Par exemple, le temps de freinage d'une voiture dépend de la vitesse de la voiture, ou encore le nombre de marches d'un escalier dépend de la hauteur de l'escalier, etc.

**Définition 1.7** *Un ensemble de **paires ordonnées** de nombres réels est appelé une relation binaire.*

L'ensemble des premiers nombres d'une relation binaire est l'**ensemble de départ**, ou **domaine** de la relation. Le deuxième ensemble est l'**ensemble d'arrivée** de la relation. L'ensemble de départ contient les valeurs que prend la **variable** $x$ appelée **variable indépendante**. L'ensemble d'arrivée contient les valeurs que prend la **variable** $y$ appelée **variable dépendante**.

On attribue à la variable indépendante des valeurs arbitraires qui vont déterminer les valeurs de la variable dépendante.

En général, on note par $x$ la variable indépendante, et par $y$ la variable dépendante.

**Exemple 1.10** *$A = \{(x,y): x,y \in \mathbb{N}, x \leq y\}$ est une relation binaire dont quelques couples sont: $(1;1)$, $(1;2)$, $(5;20)$, etc. Notons que $(3;2)$, $(8;6)$, $(25;21)$ par exemple, n'appartiennent pas à $A$.*
*$B = \{(x;y): y = 2x - 1, x \in \mathbb{R}\}$ est une relation binaire où l'ensemble de départ est $\mathbb{R}$ et l'ensemble d'arrivée est aussi $\mathbb{R}$. Quelques exemples de couples: (0; −1), (0.5; 0), (1.41; 1.82), etc.*

**Définition 1.8** *Si une relation est telle qu'à chaque élément de l'ensemble de départ est associé* **un et un seul élément** *de l'ensemble d'arrivée, on dit que c'est une* ***fonction***.

**Toutes les fonctions sont des relations, mais toutes les relations ne sont pas des fonctions**. Selon la définition, dans l'exemple 1.10, B est une fonction mais A n'est pas une fonction.

On représente traditionnellement une fonction par une lettre minuscule: $f$ (ou $g$, ou $h$, etc.). Si la fonction $f$ associe à l'élément $x$ de l'ensemble de départ E, l'élément $y$ de l'ensemble d'arrivée F, on écrit:

$$\begin{aligned} f:\quad & \mathrm{E} \longrightarrow \mathrm{F} \\ & x \longmapsto y = f(x) \end{aligned}$$

On dit que $y$ est l'**image** de $x$ par la fonction $f$. Au cours d'un même problème particulier, le même symbole fonctionnel indique toujours la même loi de dépendance de la fonction.

**Exemple 1.11** *Si $f(x) = x^2 + x - 2$, alors:*

$$\begin{aligned} f(a) &= a^2 + a - 2 \\ f(1) &= 1 + 1 - 2 = 0 \\ f(-2) &= 4 - 2 - 2 = 0 \\ f(x+2) &= (x+2)^2 + (x+2) - 2 = x^2 + 5x + 4 \\ f(x+h) - f(x) &= (x+h)^2 + (x+h) - 2 - (x^2 + x - 2) \\ &= x^2 + 2xh + h^2 + x + h - 2 - x^2 - x + 2 \\ &= 2xh + h^2 + h. \end{aligned}$$

On définit la somme, la différence, le produit et le quotient de deux fonctions $f(x)$ et $g(x)$ de la manière suivante:

- **Somme de deux fonctions :** $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$.
- **Différence de deux fonctions :** $(f-g)(x) = f(x) - g(x)$.
- **Produit de deux fonctions :** $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$.
- **Quotient de deux fonctions :** $\left(\dfrac{f}{g}\right)(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}, \quad g(x) \neq 0$.
- On peut finalement définir la **composition de deux fonctions** $y = f(x)$ et $z = g(y)$ par : $(g \circ f)(x) = g(f(x))$.

  Cette nouvelle fonction est notée $h = g \circ f$ qui se lit " $g$ rond $f$ ". On trouve $h(x)$ en substituant la première fonction dans la deuxième : $h(x) = g(f(x))$. On peut résumer la composition des fonctions par le schéma suivant :

$$x \overset{f}{\longmapsto} y \overset{g}{\longmapsto} z$$
$$x \overset{h=g\circ f}{\longmapsto} z$$

**Note** En général, $\mathbf{f(g(x)) \neq g(f(x))}$.

**Exemple 1.12** *Si* $f(x) = x^2 + x + 1$ *et* $g(x) = x + 1$ *, alors :*

$$\begin{aligned}
g(f(x)) \quad &: \quad x \overset{f}{\longmapsto} x^2 + x + 1 = y \overset{g}{\longmapsto} z = y + 1 \\
x \overset{g\circ f}{\longmapsto} z \quad &= \quad (x^2 + x + 1) + 1 = x^2 + x + 2 \\
f(g(x)) \quad &: \quad x \overset{g}{\longmapsto} x + 1 = y \overset{f}{\longmapsto} z = y^2 + y + 1 \\
x \overset{f\circ g}{\longmapsto} z \quad &= \quad (x+1)^2 + (x+1) + 1 = x^2 + 3x + 3
\end{aligned}$$

*Dans cet exemple,* $g(f(x))$ *est bien différent de* $f(g(x))$.

**Définition 1.9** *On appelle* ***surjection*** *ou* ***fonction surjective*** *une fonction telle que* ***tout élément y*** *de l'ensemble d'arrivée* $F$ *soit l'image* ***d'au moins un élément x*** *de l'ensemble de départ* $E$. $\forall y \in F, \exists x \in E : y = f(x)$.

**Exemple 1.13** *Soient les ensembles* $E = \{x \in \mathbb{R} : -2 \leq x \leq 2\}$ *et* $F = \{y \in \mathbb{R} : 0 \leq y \leq 4\}$, *alors la fonction* $f : E \longrightarrow F$ *définie par* $f(x) = x^2$ *est surjective.*

En effet, si $y \in \mathrm{F}$, $y$ est un nombre positif ou nul, inférieur ou égal à 4 et $\sqrt{y}$ est un nombre réel positif ou nul, inférieur ou égal à 2 : $\sqrt{y} \in \mathrm{E}$ et $f(\sqrt{y}) = (\sqrt{y})^2 = y$. Ainsi, $x = \sqrt{y}$ vérifie $x \in \mathrm{E}$ et $f(x) = y$. Il est à relever que l'on a aussi : $-\sqrt{y} \in \mathrm{E}$ et $f(-\sqrt{y}) = y$.

**Exemple 1.14** *Soit la fonction $f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$ définie comme suit : $x \mapsto 2x$. L'ensemble d'arrivée est alors l'ensemble des nombres pairs. Cette fonction n' est pas surjective puisque 5 n'est l'image d'aucun élément $x \in \mathbb{Z}$ , ainsi que tous les nombres impairs.*

**Définition 1.10** *Une application $f$ est dite **injective** si et seulement si deux éléments quelconques distincts de l'ensemble de départ ont deux images par $f$ distinctes : $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$ ou encore $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$.*

Une injection (ou fonction injective) est en fait une fonction telle que chaque élément $y$ de l'ensemble d'arrivée soit l'image d'au plus un élément $x$ de l'ensemble de départ.

**Exemple 1.15** *Soit la fonction $f(x) = 3x + 2$.*
*Elle est injective car :*

$$\begin{aligned} f(x_1) &= f(x_2) \\ 3x_1 + 2 &= 3x_2 + 2 \\ &\Rightarrow 3x_1 = 3x_2 \\ &\Rightarrow x_1 = x_2. \end{aligned}$$

**Définition 1.11** *On appelle **bijection** ou **fonction bijective** une fonction qui est à la fois **surjective et injective**. Si $f(x)$ est une bijection, chaque élément $y$ de l'ensemble d'arrivée est l'image d'un unique élément $x$ de l'ensemble de départ.*

**Exemple 1.16** *Soit la fonction*

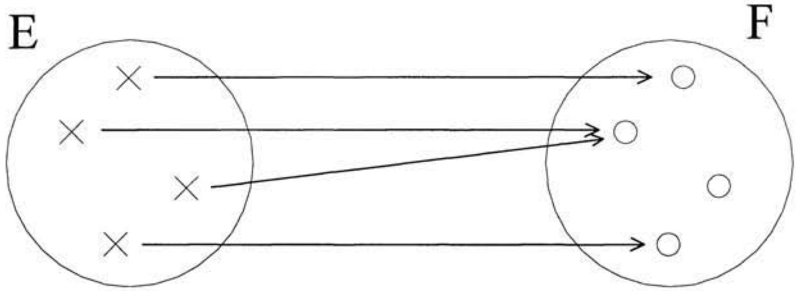
$$\begin{aligned} f : \quad \mathbb{Z} &\longrightarrow \mathbb{Z} \\ x &\longmapsto f(x) = x - 2. \end{aligned}$$

*Cette fonction est bijective car tout élément $y \in \mathbb{Z}$ est l'image du seul élément $x = y + 2$ de $\mathbb{Z}$ . On peut calculer quelques couples :*

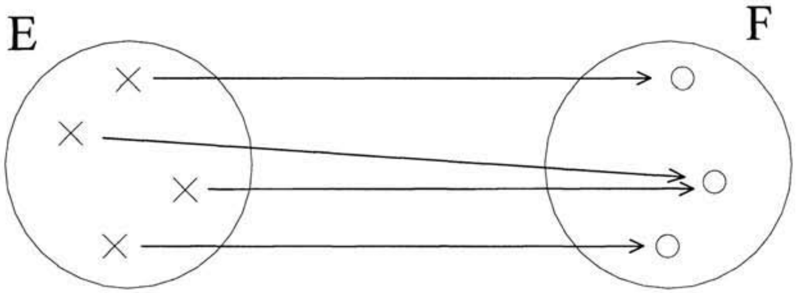
| $x$ | ... | $-2$ | $-1$ | $0$ | $1$ | $2$ | $3$ | ... |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | ... | $-4$ | $-3$ | $-2$ | $-1$ | $0$ | $1$ | ... |

Nous allons, pour terminer ce paragraphe, schématiser les différentes notions que nous venons d'aborder.

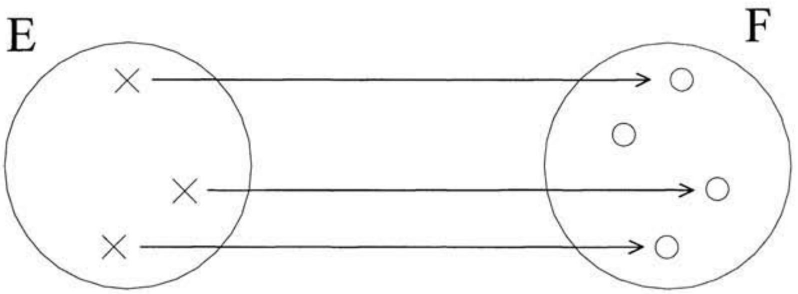
L'ensemble de départ est noté par E et l'ensemble d'arrivée par F ; les croix représentent les éléments de E et les ronds les éléments de F. Les flèches lient un élément de E à un élément de F pour former un couple $(x; y)$.



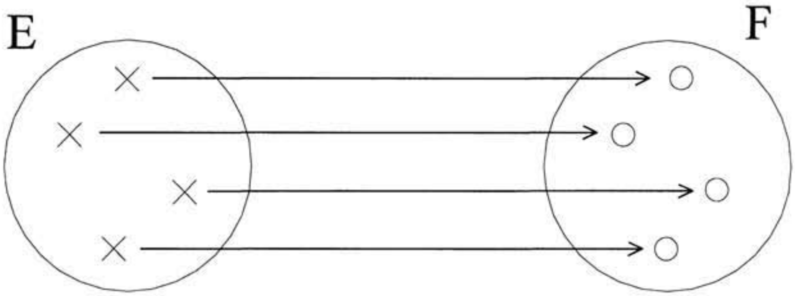

**Fonction** : Tout élément $x$ de E a une image unique $y$ dans F.




**Surjection** : Tout élément de F est image.




**Injection** : $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$.




**Bijection** : Injection **et** surjection.

## 1.7 Fonction inverse

Si $f(x)$ est une bijection telle que $x \longmapsto y$, il existe une et une seule bijection telle que $y \longmapsto x$. On dit que cette fonction est la **fonction inverse** de $f$ et on la désigne par $f^{-1}(x)$. On trouve $f^{-1}(x)$ en résolvant l'équation $y = f(x)$ par rapport à la variable $x$, ce qui donne $x = g(y)$, c'est-à-dire que $y$ est la variable indépendante et $x$ la variable dépendante.

**Exemple 1.17** *Soit $f(x) = 2x + 4$. La fonction inverse $f^{-1}(x)$ se trouve de la façon suivante :*

$$\begin{aligned} y &= 2x + 4 \\ \Rightarrow y - 4 &= 2x \\ \Rightarrow x &= \frac{y-4}{2}. \end{aligned}$$

*Nous avons donc $x = g(y) = \dfrac{y-4}{2}$. Par conséquent, la fonction inverse est $f^{-1}(x) = \dfrac{x-4}{2}$ puisqu'il est d'usage d'employer la lettre $x$ pour la variable indépendante et la lettre $y$ pour la variable dépendante.*

## 1.8 Fonctions explicites et implicites

Jusqu'ici, nous avons toujours vu les fonctions sous la forme : $y = f(x)$. La variable dépendante est $y$ et elle est en quelque sorte explicitée par $x$, d'où le nom de **fonction explicite** quand $y$ est écrit en fonction de $x$. En

revanche, une **fonction implicite** est une fonction où **les deux variables apparaissent du même côté de l'équation**.

**Exemple 1.18** $y = \dfrac{2x-1}{x+3}$ *est une fonction explicite, tandis que* $x^2 - 5y = 6$ *est une fonction implicite.*

Il est parfois possible de résoudre l'équation d'une fonction implicite par rapport à l'une ou l'autre des variables pour obtenir ainsi une fonction explicite. Dans l'exemple 1.18, on peut écrire $x^2 - 5y = 6$ sous la forme explicite $y = f(x)$: $x^2 - 5y = 6 \Rightarrow y = \dfrac{x^2-6}{5}$.

Mais la forme explicite $x = f(y)$ n'est pas une fonction. En effet,

$$x^2 - 5y = 6 \Rightarrow x = \pm\sqrt{5y+6}$$

par exemple $y = 38$ a deux images : $x = -14$ et $x = 14$.

Quand, à partir d'une fonction implicite, on parvient à écrire deux fonctions explicites, ces deux fonctions explicites sont alors réciproques l'une de l'autre.

**Exemple 1.19** *Soit la fonction implicite* $3x - y = 0$. *Les deux fonctions explicites et réciproques l'une de l'autre sont :* $y = 3x$ , *et* $x = \dfrac{1}{3}y$.

# Exercices

1. Soient les ensembles :

   $A = \{x \in \mathbb{N} \ : \ x$ est un multiple de $2\}$.

   $B = \{x \in \mathbb{N} \ : \ x$ est un multiple de $3\}$.

   $C = \{x \in \mathbb{N} \ : \ x$ est un multiple de $6\}$.

   $D = \{x \in \mathbb{N} \ : \ x$ est un multiple de $8\}$.

   Déterminer : i) $A \cap B$ ; ii) $A \cap C$ ; iii) $A \cup C$ ; iv) $B \cup C$ ; v) $C \cap D$.

2. Soient $A$ et $B$ des sous-ensembles de $\Omega$. Illustrer à l'aide de diagrammes de Venn les deux règles de Morgan :

   $\overline{(\mathrm{A} \cap \mathrm{B})} = \overline{\mathrm{A}} \cup \overline{\mathrm{B}}$ et $\overline{(\mathrm{A} \cup \mathrm{B})} = \overline{\mathrm{A}} \cap \overline{\mathrm{B}}$.

3. En utilisant les quantificateurs, montrer que la réunion est distributive par rapport à l'intersection, c'est-à-dire, quels que soient les ensembles $A$, $B$ et $C$, démontrer que :

   $\mathrm{A} \cup (\mathrm{B} \cap \mathrm{C}) = (\mathrm{A} \cup \mathrm{B}) \cap (\mathrm{A} \cup \mathrm{C})$.

4. Soit $A = \{a, b\}$, $B = \{1, 3\}$ et $C = \{4, 5\}$. Déterminer :

   (a) $A \times (B \cup C)$.

   (b) $(A \times B) \cup (A \times C)$.

   (c) $A \times (B \cap C)$.

   (d) $(A \times B) \cap (A \times C)$.

5. Soit $E$, un ensemble tel que $Card(E) = 30$. Si $A$ et $B$ sont deux sous-ensembles de $E$ non disjoints ($A \cap B \neq \emptyset$) tels que $Card(A) = 20$, $Card(B) = 15$ et $Card(A \cap B) = 6$, trouver $Card(A \cup B)$.

6. Les résultats d'une entreprise ont montré que sur 50 employés, 30 sont obèses, 25 souffrent d'hypertension artérielle tandis que 20 ont un taux de cholestérol trop élevé. Parmi les 25 qui souffrent d'hypertension, 12 ont un taux de cholestérol trop élevé ; 15 obèses souffrent d'hypertension et 10 obèses souffrent d'un taux de cholestérol trop élevé ; finalement, 5 employés souffrent de ces trois maux à la fois.

   Déterminer le nombre d'employés bien portant à l'aide d'un diagramme de Venn.

7. Sur 100 étudiants, on considère les ensembles $S$ de ceux qui étudient la sociologie, $E$ de ceux qui étudient l'économie et $G$ de ceux qui étudient la gestion. Sur ces 100 étudiants, 55 étudient la sociologie, 9 la sociologie et la gestion, 7 la sociologie et l'économie, 8 l'économie et la gestion, 6 la sociologie et la gestion mais pas l'économie, 80 la sociologie ou la gestion et 12 l'économie seulement.

   (a) Combien d'étudiants suivent les trois matières?

   (b) Combien sont-ils à étudier la gestion?

   (c) Combien sont-ils à étudier l'économie?

   (d) Combien n'étudient aucune de ces trois matières?

8. Lesquels parmi ces ensembles représentent une fonction?

   $S_1 = \{(1;2),(2;8),(2;3)\}$.
   $S_2 = \{(x;y) : x \in \mathbb{R}\ ,\ x \leq y\}$.
   $S_3 = \{(x;y) : y = x^2, x \in \mathbb{R}\ \}$.
   $S_4 = \{(x;y) : y = x^2 \text{ si } 0 \leq x \leq 2, y = 3 - x \text{ si } 2 < x < 3$
   $\text{et } y = 3 \text{ si } x = 3\}$.

9. Soit la fonction $f\colon \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto f(x) = x^2 + 2x + 4. \end{array}$

   Calculer : $\dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$.

10. Montrer que la fonction $f\colon \begin{array}{rcl} \mathbb{R} - \{0\} & \longrightarrow & \mathbb{R} - \{0\} \\ x & \longmapsto & \dfrac{1}{x} \end{array}$

    est bijective, c'est-à-dire injective et surjective.

11. Montrer que la fonction $f\colon \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto f(x) = x^2 + x - 2 \end{array}$

    n'est pas injective.

12. (a) Trouver une fonction $f\colon\ \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ qui soit injective mais non surjective.

(b) Trouver une fonction $g\colon\ \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ qui soit surjective mais non injective.

(c) Trouver une fonction $h : [0;1] \longrightarrow [0;1]$ qui ne soit ni injective ni surjective, où $[0;1]$ désigne : $\{x \in \mathbb{R} \ :\ 0 \leq x \leq 1\}$.

13. On considère les fonctions : $f(x) = x + 2$ et $g(x) = 2x + 5$.

(a) Calculer $h(x) = (g \circ f)(x) = g(f(x))$
et $m(x) = (f \circ g)(x) = f(g(x))$.

(b) Calculer $f^{-1}(x)$ et $g^{-1}(x)$.

(c) Calculer $h^{-1}(x) = (g \circ f)^{-1}(x)$ et $m^{-1}(x) = (f \circ g)^{-1}(x)$.

(d) Calculer $f^{-1}(g^{-1}(x))$ et $g^{-1}(f^{-1}(x))$.

(e) Comparer les résultats obtenus sous (c) et (d). Que constate-t-on ?

14. Déterminer les deux fonctions explicites déduites de la fonction implicite :

$$x + 2y - 8 = 0$$

Que peut-on dire de ces deux fonctions ?




## EUCLIDE (env. 300 avant J.-C.)

On connaît peu de choses sur la vie d'Euclide à l'exception du fait qu'il ait enseigné à Alexandrie.

Euclide est certainement le mathématicien le plus prolifique de l'Antiquité. On lui doit l'un des plus célèbres textes de l'histoire des mathématiques : *Les Éléments.* Il s'agit d'un traité regroupant toutes les connaissances géométriques de l'époque. Composé de treize livres, il couvre la géométrie plane, la théorie des nombres, la théorie des nombres irrationnels, la géométrie solide, et s'achève sur une discussion à propos des propriétés des 5 polyhèdres. Ce traité devint l'ouvrage de référence dans l'enseignement mathématique durant deux mille ans. Plus de mille éditions furent tirées depuis la première en 1482.

Euclide écrivit également des textes sur l'astronomie, l'optique et la musique.

Œuvres majeures retrouvées : *On Divisions*, *Optics and Phaenomena* ; perdues : *Surface Loci*, *Porisms*, *Conics*, *Book of Fallacies*, *Elements of Music.*

# Chapitre 2

# Représentation graphique des fonctions

## 2.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous allons voir comment représenter des équations algébriques d'une façon géométrique. Cette analyse graphique permet une visualisation des relations entre les variables. Nous avons besoin, pour localiser des points particuliers dans le plan ou dans l'espace, d'un système de coordonnées. Le système le plus utilisé est le système de coordonnées cartésiennes. C'est dans ce dernier que l'on représentera les principales fonctions élémentaires en y associant autant que possible des applications économiques.

## 2.2 Coordonnées cartésiennes

Les couples $(x; y = f(x))$ d'une fonction peuvent être représentés graphiquement à l'aide d'un système de coordonnées qui est constitué généralement de deux axes gradués et perpendiculaires (horizontal et vertical). L'intersection de ces deux axes représente le point $(0; 0)$, il est appelé **origine** et est noté $O$. Les quatre régions ainsi créées sont appelées les **quadrants** et sont numérotées comme dans la figure 2.1.

Pour localiser un point dans ce repère, il suffit de reporter les **coor-**

**données** $(x; y)$ du point comme suit : on reporte horizontalement la distance $x$ (appelé aussi l'**abscisse**) et verticalement la distance $y$ (appelé aussi l'**ordonnée**).

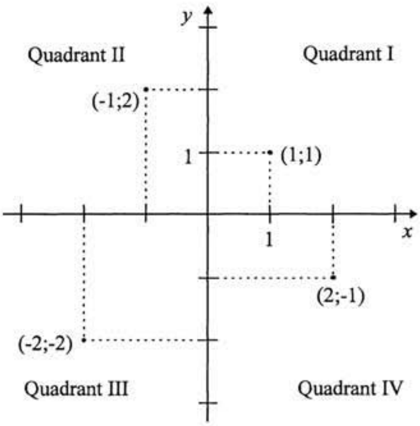



Figure 2.1: Système de coordonnées cartésiennes

## 2.3 Les droites

Une équation du type $y = ax + b$, où $a$ et $b$ sont des paramètres dont l'un au moins n'est pas nul, est dite équation cartésienne d'une droite. Un point appartient à la droite si et seulement si ses coordonnées satisfont l'équation ci-dessus. Pour chaque droite dans le plan, pour autant qu'elle ne soit pas parallèle à l'axe des $y$, on peut trouver l'équation cartésienne correspondante. Il y a deux problèmes à envisager :

1. Connaissant l'équation cartésienne, représenter la droite graphiquement.

2. Connaissant deux points d'une droite, trouver l'équation cartésienne correspondante.

On peut résoudre le premier problème en calculant les intersections de la droite avec les axes. L'intersection avec l'axe des $x$ se calcule en posant

$y = 0$ dans l'équation de la droite. L'intersection avec l'axe des $y$ se calcule en posant $x = 0$ dans l'équation.

Le deuxième problème se résout en prenant l'équation générale d'une droite $y = ax + b$ et en remplaçant $x$ et $y$ par les coordonnées de deux points quelconques pour obtenir deux équations dont les inconnues sont alors $a$ et $b$.

**Exemple 2.1** *Soit l'équation de la droite $y = 4x - 2$. Il suffit de calculer les coordonnées de* ***deux points*** *pour représenter cette droite graphiquement.*

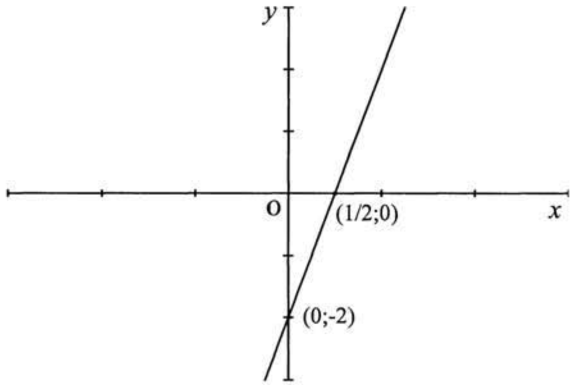



Figure 2.2: Graphe de $y = 4x - 2$

*Intersection avec l'axe des $x$ :*

$$\begin{aligned} y = 0 \Rightarrow 0 &= 4x - 2 \\ \Rightarrow x &= \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

*Le point est donc* $\left(\frac{1}{2}; 0\right)$.

*Intersection avec l'axe des $y$ :*

$$\begin{aligned} x = 0 \Rightarrow y &= 4 \cdot 0 - 2 \\ \Rightarrow y &= -2. \end{aligned}$$

*Le point est donc* $(0; -2)$.

*La droite qui passe par les points* $\left(\frac{1}{2}; 0\right)$ *et* $(0; -2)$ *est représentée dans la figure 2.2.*

**Exemple 2.2** *Sachant que la droite $y = ax + b$ passe par les deux points $(1;2)$ et $(3;4)$, trouvons $a$ et $b$.*
*Pour cela, remplaçons successivement dans $y = ax + b$, $x$ et $y$ par les coordonnées des deux points $(1;2)$ et $(3;4)$ :*

$$2 = a + b \tag{2.1}$$
$$4 = 3a + b \tag{2.2}$$

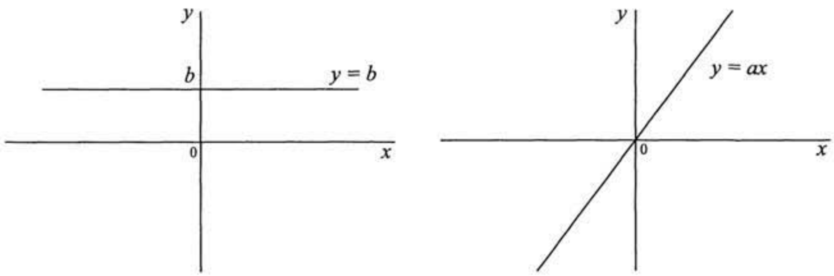
*De l'équation (2.1), nous déduisons : $b = 2 - a$.*
*En remplaçant dans l'équation (2.2), on a :*

$$\begin{aligned} 4 = 3a + (2 - a) &\Rightarrow 2 = 2a \\ &\Rightarrow a = 1. \end{aligned}$$

*Comme $b = 2 - a$, nous trouvons $b = 1$. Nous avons donc l'équation :*

$$y = x + 1.$$

Dans l'équation générale d'une droite, $y = ax + b$, il peut y avoir $a = 0$ ou $b = 0$. Si $b = 0$, cela signifie que la droite passe par l'origine, à savoir le point (0; 0). Si $a = 0$, la droite est horizontale et passe en $y = b$ (Figure 2.3).




$a = 0$ $b = 0$

Figure 2.3: Représentation graphique de droites

Deux droites dans le plan sont soit **parallèles** soit **sécantes**. Elles sont parallèles si $a$ (appelé pente de la droite) est le même pour les deux droites et $b$ (appelé aussi l'**ordonnée à l'origine**) est différent pour les deux droites. Elles se confondent si $a$ et $b$ sont les mêmes pour les deux droites. Dans tout autre cas, les deux droites se coupent en un point $(x;y)$ qui doit satisfaire les

deux équations simultanément. Par conséquent, on trouve les coordonnées du point d'intersection en résolvant le système d'équations linéaires formé par les équations des deux droites. Si les deux droites sont parallèles, il n'y a pas de solution au système (les deux droites ne se coupent pas), et si les deux droites sont confondues, il y a une infinité de solutions (chaque point de la droite est solution). En général, on peut résoudre un système d'équations linéaires par **élimination** ou par **substitution**.

**Exemple 2.3** *On va trouver le point d'intersection de deux droites par élimination. Supposons que l'équation de la première droite est $y = 3x + 7$ et l'équation de la deuxième droite est $y = x - 3$.*
*Nous avons donc le système de deux équations suivant :*

$$y = 3x + 7 \tag{2.3}$$
$$y = x - 3 \tag{2.4}$$

*Nous multiplions la deuxième équation par 3 et la soustrayons de la première équation pour éliminer $x$ :*

$$\begin{array}{rrcl} & y & = & 3x + 7 \\ - & 3y & = & 3x - 9 \\ \hline & -2y & = & 16 \end{array}$$

*De là, nous obtenons $y = -8$ et nous substituons cette valeur dans (??) ou (2.4) :*

$$-8 = 3x + 7$$

*d'où $x = -5$. Le point d'intersection est donc $(-5; -8)$. Graphiquement, nous obtenons la figure 2.4.*

**Exemple 2.4** *Reprenons les deux mêmes droites et cherchons le point d'intersection par substitution. Le système est le suivant :*

$$y = 3x + 7 \tag{2.5}$$
$$y = x - 3. \tag{2.6}$$

*Nous substituons la valeur de $y$ de la deuxième équation dans la première équation :*

$$x - 3 = 3x + 7.$$

*Nous obtenons ainsi $2x = -10$, d'où $x = -5$, et substituons cette valeur dans (2.5) ou dans (2.6), ce qui nous donne $y = -8$. Le point d'intersection est évidemment le même : $(-5; -8)$.*

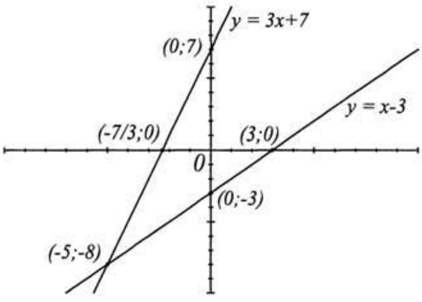



Figure 2.4: Intersection de deux droites

**Exemple 2.5** *Soient les deux droites suivantes:* $y = 2x+1$ *et* $y = 2x+2$. $a$ *est identique dans les deux droites, et* $b$ *est différent. Elles sont donc parallèles et n'ont pas d'intersection (Figure 2.5).*

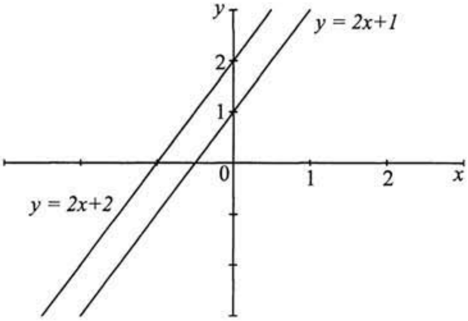



Figure 2.5: Deux droites parallèles

## 2.4 Applications économiques des droites

Dans ce paragraphe, nous nous intéressons aux fonctions de demande, d'offre et de consommation. En économie élémentaire, la **fonction de demande** est une droite de pente négative, c'est-à-dire que lorsque les prix augmentent, la quantité demandée diminue, et lorsque les prix diminuent, la quantité demandée augmente. Représentons dans la figure 2.6 une fonction de demande.

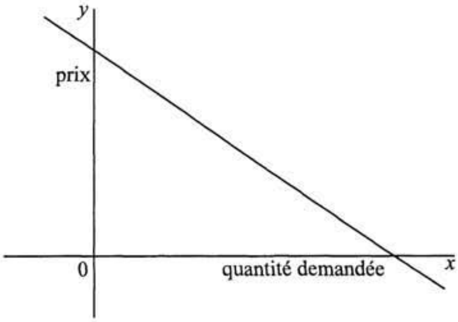



Figure 2.6: Fonction de demande

**Par convention**, le prix sera indiqué sur l'axe des $y$ et la quantité demandée sur l'axe des $x$. La variable $x$ représente la quantité et la variable $y$ le prix. Nous noterons que seul le quadrant I nous intéresse. En effet, il est le seul pertinent en économie (du moins dans ce problème), des prix et des quantités négatifs n'ayant pas de sens. Il est nécessaire également de signaler que dans la réalité une fonction de demande est rarement trouvée sous la forme d'une droite (ou même d'une portion de parabole) ; cependant, dans le cadre de cet ouvrage, nous nous permettrons de la simplifier pour ne travailler qu'avec des droites.

**Exemple 2.6** *La demande de montres est de 10 unités si le prix est égal à 160 francs et elle est de 20 unités si le prix est égal à 120 francs. Nous allons calculer l'équation de la demande. Nous avons deux points (10; 160) et (20; 120). Nous substituons les coordonnées de ces points dans l'équation générale d'une droite pour obtenir un système de deux équations à deux inconnues (a et b) :*

$$160 = 10a + b \tag{2.7}$$
$$120 = 20a + b. \tag{2.8}$$

*Nous résolvons par élimination :*

$$\begin{array}{rrcl} & 320 & = & 20a + 2b \\ - & 120 & = & 20a + b \\ \hline & 200 & = & b \end{array}$$

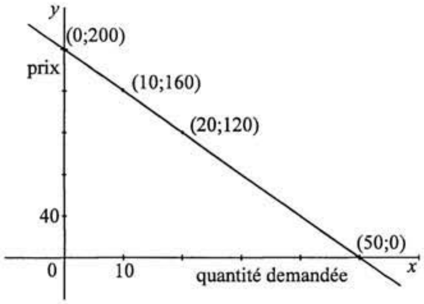



Figure 2.7: Graphe de la fonction de demande $y = -4x + 200$

*Nous substituons* $b = 200$ *dans (2.8):* $120 = 20a + 200$*, d'où* $a = -4$*. Nous avons donc l'équation de demande* $y = -4x + 200$*. (Figure 2.7).*

En général, la **fonction d'offre** est une droite de pente positive, c'est-à-dire que lorsque les prix augmentent, la quantité offerte augmente aussi, et lorsque les prix diminuent, la quantité offerte diminue aussi. Comme pour la fonction de demande, $x$ représente la quantité, et $y$ le prix. À nouveau, seules les valeurs positives de $x$ et de $y$ nous intéressent. Représentons dans la figure 2.8 une fonction d'offre.

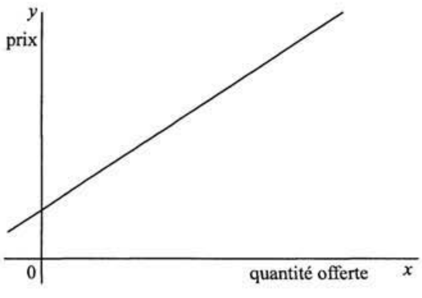



Figure 2.8: Fonction d'offre

**Exemple 2.7** *Quand le prix est de 100 francs, le nombre d'appareils photos d'une certaine marque offerts sur le marché est 50 et quand le prix est de 150 francs, le nombre d'appareils photos offerts est 100. Nous allons calculer*

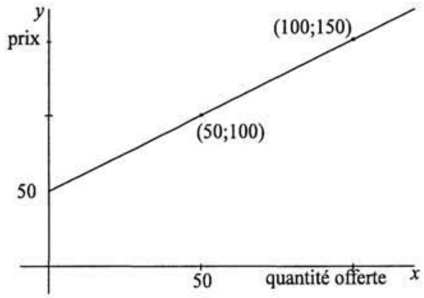



Figure 2.9: Graphe de la fonction d'offre $y = x + 50$

*l'équation de l'offre.*
*Nous avons les deux points* $(50; 100)$ *et* $(100; 150)$. *Nous substituons les coordonnées de ces points dans l'équation générale* $y = ax + b$ *et obtenons le système suivant :*

$$100 = 50a + b \quad (2.9)$$
$$150 = 100a + b \quad (2.10)$$

*que nous résolvons par élimination :*

$$\begin{array}{rrcl} & 200 & = & 100a + 2b \\ - & 150 & = & 100a + b \\ \hline & 50 & = & b \end{array}$$

*Nous substituons* $b = 50$ *dans (2.10) :* $150 = 100a + 50$, *d'où* $a = 1$. *Nous avons donc l'équation d'offre* $y = x + 50$ *(Figure 2.9).*

Nous venons d'introduire les fonctions de demande et d'offre. Par conséquent, nous pouvons maintenant parler de l'**équilibre du marché**. On parle d'équilibre du marché quand les fonctions de demande et d'offre se coupent dans le quadrant I. En ce point, la quantité demandée est égale à la quantité offerte. Donc la quantité à l'équilibre et le prix d'équilibre sont donnés par les coordonnées du point d'intersection des deux droites (demande et offre).

**Exemple 2.8** *Cherchons l'équilibre du marché pour les fonctions d'offre et de demande suivantes :*

$$\begin{array}{rcl} \textit{offre} & : & y = \frac{1}{2}x + 1 \\ \textit{demande} & : & y = -2x + 6 \end{array}$$

*Le point d'intersection est trouvé par élimination :*

$$\begin{array}{rrcl} & 4y & = & 2x+4 \\ + & y & = & -2x+6 \\ \hline & 5y & = & 10 \Rightarrow y=2 \end{array}$$

*On remplace* $y=2$ *dans (2.12):* $2=-2x+6$, *d'où* $x=2$.
*L'équilibre du marché se produit quand la quantité est égale à 2 et le prix égal à 2 (Figure 2.10).*

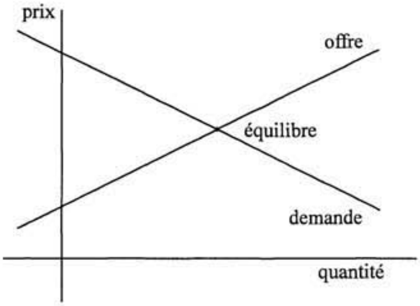



Figure 2.10: Représentation graphique de l'équilibre du marché

Nous allons terminer ce paragraphe en parlant de la fonction de consommation. Cette fonction est caractérisée de la façon suivante :

1. La consommation est fonction du revenu disponible, c'est-à-dire que $C = f(Y_d)$.
2. Quand le revenu est nul, la consommation n'est pas nulle car il y a toujours la consommation qui correspond au minimum vital. La droite ne passe donc pas par l'origine, mais au-dessus de l'origine.
3. Quand le revenu augmente, la consommation augmente aussi mais d'une quantité inférieure. C'est donc une droite de pente positive, inférieure à 1.

**Exemple 2.9** *Si le minimum vital est égal à 10, et si la consommation représente 60% du revenu disponible, la fonction de consommation est* $C = 0.6Y_d + 10$, *où* $C$ *est la consommation et* $Y_d$ *le revenu disponible. Nous pouvons tracer le graphe de cette fonction de consommation (Figure 2.11).*

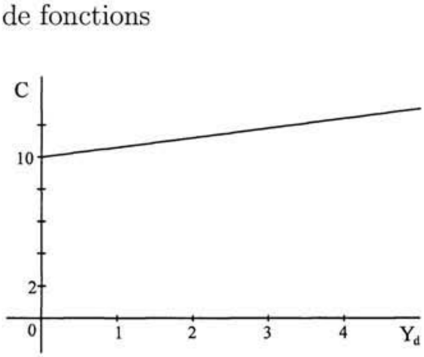



Figure 2.11: Graphe de la fonction de consommation $C = 0.6Y_d + 10$

## 2.5 Différents types de fonctions

- **Polynômes**

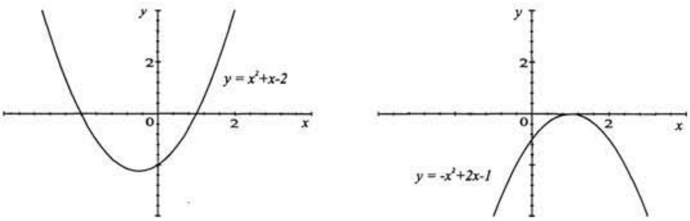
  On appelle **polynôme de degré n** la fonction donnée par :

  $$y = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

  où $a_n \neq 0, n \in \mathbb{N}$ et $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ sont les **coefficients** du polynôme.

  Pour $n = 1$, en posant $a_1 = a$ et $a_0 = b$ nous obtenons le polynôme de degré 1 : $y = ax + b$ dont on sait que sa représentation graphique est une droite.

**Exemple 2.10** *Regardons le polynôme de degré 2 donné par :* $y = ax^2 + bx + c$ *dont la représentation graphique est une* ***parabole****. Dans la figure 2.12, nous observons deux paraboles différentes suivant le signe de* $a$.




$a > 0$ $a < 0$

Figure 2.12: Représentation graphique de paraboles

**Exemple 2.11** *Représentation graphique d'un polynôme de degré 5 (Figure 2.13).*

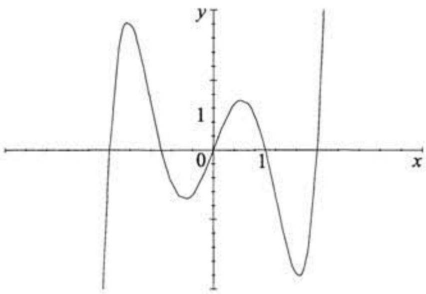



Figure 2.13: Graphe de $y = x^5 - 5x^3 + 4x$

- **Fonctions rationnelles**

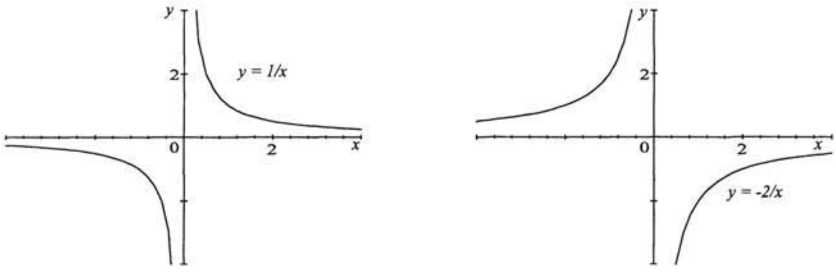
  Une **fonction rationnelle** est une fonction de la forme $\frac{p(x)}{q(x)}$, où $p(x)$ et $q(x)$ sont des polynômes, c'est-à-dire:

$$y = \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0}$$

  avec $a_n \neq 0$ et $b_m \neq 0$.

  Les fonctions rationnelles les plus simple (mis à part les polynômes) sont celles que l'on peut exprimer sous la forme $y = \frac{1}{x^n}$, avec $n = 1, 2, \ldots$. On peut aussi les écrire $x^{-n}$ au lieu de $\frac{1}{x^n}$.

**Exemple 2.12** *Traçons les graphes de l'**hyperbole** caractérisée par l'équation $y = \frac{a}{x}$.*
*Selon la valeur de a, on obtient deux hyperboles différentes (Figure 2.14).*




$a > 0$ $a < 0$

Figure 2.14: Graphes d'hyperboles

**Exemple 2.13** *Traçons encore le graphe de la fonction rationnelle* $y = \frac{x-1/2}{x^3-x}$ *dont le domaine de définition est* $\mathbb{R} - \{-1, 0, 1\}$ *(Figure 2.15).*

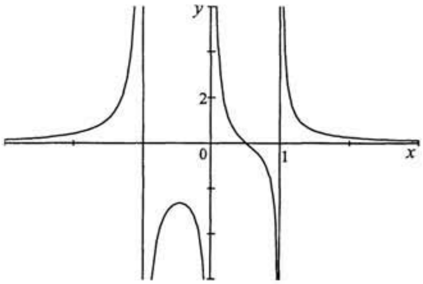



Figure 2.15: Graphe de $y = \dfrac{x - 1/2}{x^3 - x}$

- **Fonctions puissances**

  On appelle **fonction puissance** la fonction $y = x^\alpha$, où $\alpha$ est une constante arbitraire.

  Lorsque $\alpha$ est rationnel ($\alpha \in \mathbb{Q}$), il peut toujours s'écrire sous la forme $\alpha = \dfrac{p}{q}$ où $p$ et $q$ sont des entiers et $q \neq 0$. Dans ce cas, $x^\alpha = x^{p/q} = \sqrt[q]{x^p}$ (on lit "racine $q^{\text{ème}}$ de $x$ puissance $p$").

Le domaine de définition de la fonction $y = x^\alpha$ dépend de la nature du nombre $\alpha$; par exemple, si $\alpha$ est un entier négatif ou nul, c'est-à-dire $\alpha \leq 0$, alors le domaine de définition sera $\mathbb{R} - \{0\}$.

Si $\alpha = 1/q$, où $q$ est un entier strictement positif, alors le domaine de définition sera $\mathbb{R}$ lorsque $q$ est impair et $\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$ lorsque $q$ est pair.

**Exemple 2.14** *La figure 2.16 représente les graphes de la fonction $y = x^\alpha$ avec différentes valeurs de $\alpha$.*

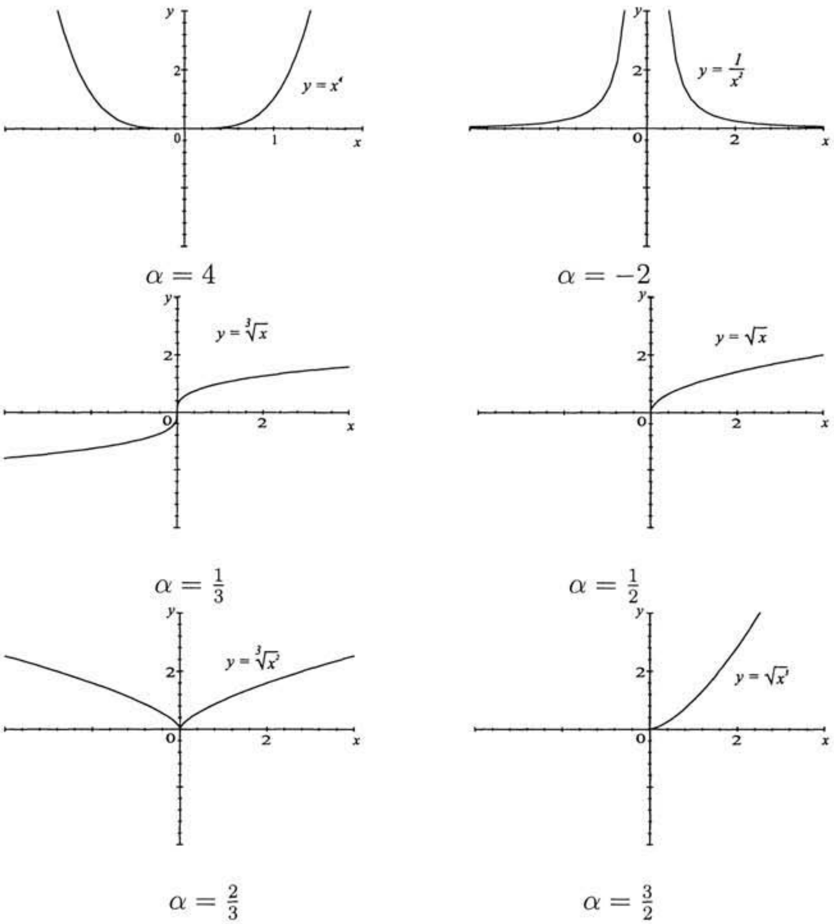



Figure 2.16: Graphes de fonctions puissances

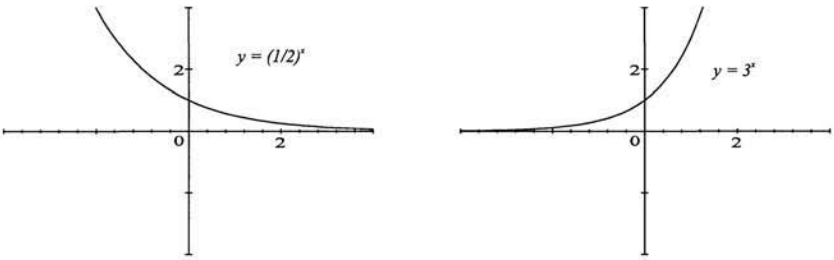
- **Fonctions exponentielles et logarithmiques**

  On appelle fonction exponentielle la fonction $y = a^x$, où $a > 0$ et $a \neq 1$. La fonction réciproque de $y = a^x$ est appelée **fonction logarithmique** et se note $y = \log_a x$, où $a > 0$, $a \neq 1$ et $x > 0$.

  Puisque l' ensemble des valeurs de la fonction exponentielle est $0 < y < +\infty$, la fonction logarithmique ne peut être définie que pour les valeurs **positives** de l'argument et admet ainsi pour **domaine de définition** $0 < x < \infty$, c'est-à-dire $\mathbb{R}_+ - \{0\}$.

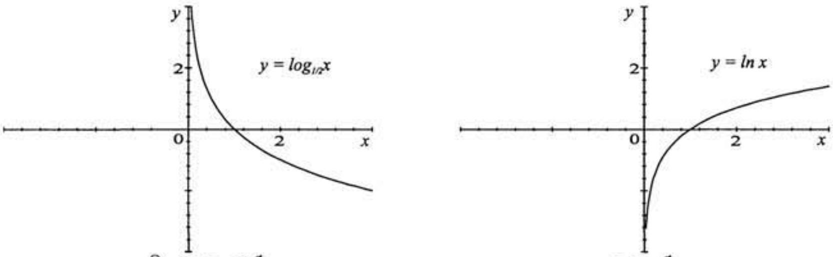
  L'indice $a$ dans $\log_a$ indique que le logarithme est pris en base $a$. En pratique, les bases usitées sont la base 10 et la base $e$ (logarithme népérien ou logarithme naturel, $e \cong 2.7182$). C'est pourquoi le logarithme en base 10 s'écrit simplement $\log x$ et le logarithme naturel se note $\ln x$.

**Exemple 2.15** *Les figures 2.17 et 2.18 représentent les fonctions exponentielles et logarithmiques pour différentes bases.*




$0 < a < 1$ $a > 1$

Figure 2.17: Graphes de fonctions exponentielles




$0 < a < 1$ $a > 1$

Figure 2.18: Graphes de fonctions logarithmiques

Rappelons ici quelques règles de manipulation des logarithmes :

| | | |
|---|---|---|
| 1) $a^{\log_a x} = x$ | 6) $\log_a(x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$ | |
| 2) $\log_a(a^x) = x$ | 7) $\log_a(x/y) = \log_a x - \log_a y$ | pour $y \neq 0$ |
| 3) $\log_a a = 1$ | 8) $\log_a(x^r) = r \log_a x$ | |
| 4) $\log_a 1 = 0$ | 9) $\log_a(\sqrt[r]{x}) = 1/r \log_a x$ | pour $r \neq 0$ |
| 5) $\log_a x = \dfrac{lnx}{lna}$ | 10) $\log_b x = \log_b a \cdot \log_a x$ | |

- **Fonctions trigonométriques**

  Le sinus et le cosinus d'un angle $x$ sont définis dans le cercle trigonométrique de rayon 1 (Figure 2.19) de la manière suivante :

  $\sin x = \overline{OS} = \overline{CP}$ et $\cos x = \overline{OC} = \overline{SP}$, car $\overline{OP} = 1$.

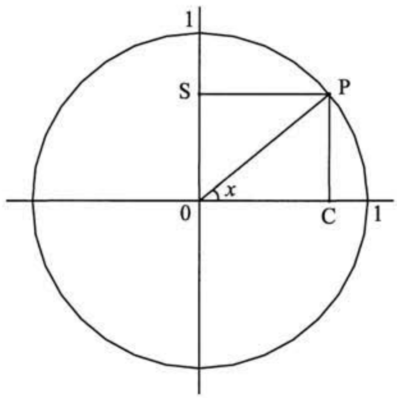
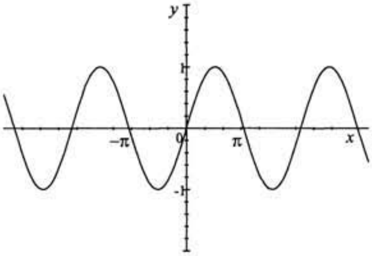



Figure 2.19: Cercle trigonométrique

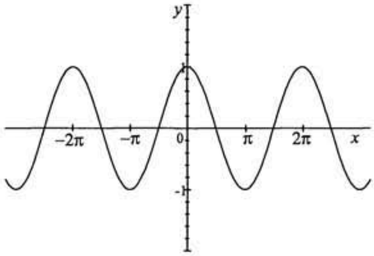
Les fonctions trigonométriques simples sont les suivantes :

1. $y = \sin x$.
2. $y = \cos x$.
3. $y = \tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$.

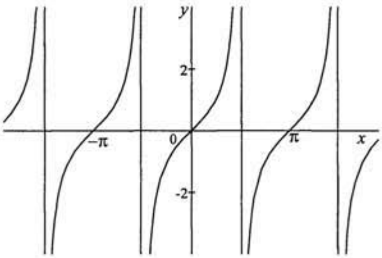
4. $y = \cot x = \dfrac{\cos x}{\sin x}$.
5. $y = \sec x = \dfrac{1}{\cos x}$.
6. $y = \csc x = \dfrac{1}{\sin x}$.



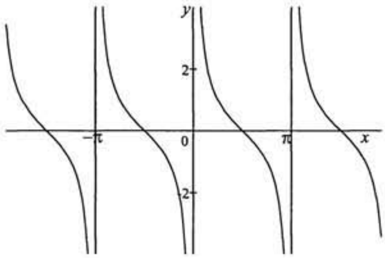

(1) $y = \sin x$



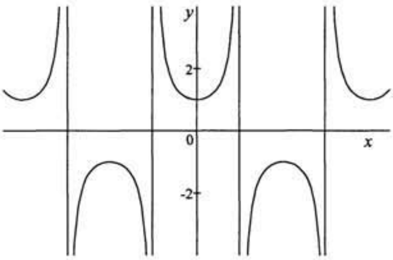

(2) $y = \cos x$



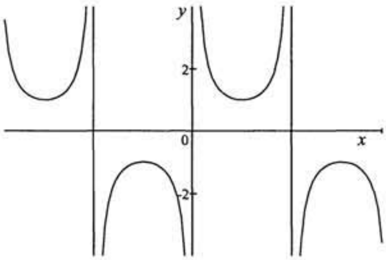

(3) $y = \tan x$




(4) $y = \cot x$




(5) $y = \sec x$




(6) $y = \csc x$

Figure 2.20: Fonctions trigonométriques

**Note** La variable indépendante $x$ est exprimée en radians.

La principale propriété des fonctions trigonométriques est leur **périodicité** : on dit que la fonction $y = f(x)$ est périodique s'il existe un nombre c tel que $f(x + c) = f(x)$. Le plus petit de ces nombres est appelé **période** de la fonction. Il découle de cette définition que les fonctions $y = \sin x$ et $y = \cos x$ sont des fonctions périodiques de période $2\pi$. La période des fonctions $y = \tan x$ et $y = \cot x$ est égale à $\pi$. Notons l'identité suivante :

$$\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$$

Les fonctions $y = \sin x$ et $y = \cos x$ sont définies pour toutes les valeurs de $x$.
Les fonctions $y = \tan x$ et $y = \sec x$ sont définies partout, sauf aux points $x = (2k + 1) \cdot \pi/2$, $k \in \mathbb{Z}$ .
Les fonctions $y = \cot x$ et $y = \csc x$ sont définies partout, sauf aux points $x = k \cdot \pi$, $k \in \mathbb{Z}$ .
Les graphes des fonctions trigonométriques sont représentés sur la figure 2.20.

- **Fonctions hyperboliques**

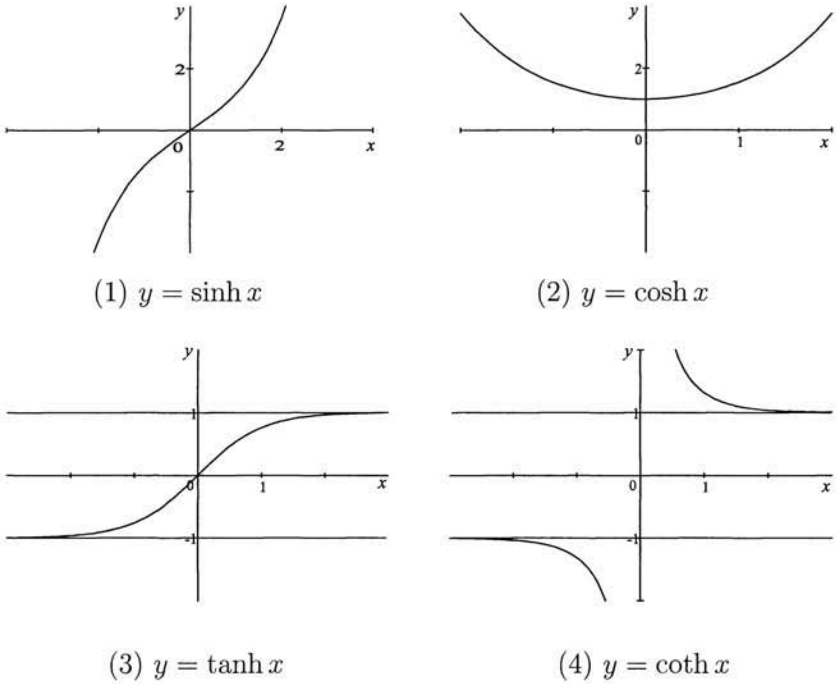
  Soient les quatre fonctions hyperboliques ainsi définies :

  1. Sinus hyperbolique : $y = \sinh x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$.
  2. Cosinus hyperbolique : $y = \cosh x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$.
  3. Tangente hyperbolique : $y = \tanh x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$.
  4. Cotangente hyperbolique : $y = \coth x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$.

  On peut facilement en déduire les identités suivantes :

  (a) $\tanh x = \dfrac{\sinh x}{\cosh x}$.
  (b) $\coth x = \dfrac{\cosh x}{\sinh x}$.
  (c) $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$.

L'analogie entre ces relations et celles liant les fonctions trigonométriques justifie l'usage des termes sinus hyperbolique, cosinus hyperbolique, etc. Voyons encore les graphes de ces quatre fonctions (Figure 2.21).




(1) $y = \sinh x$ (2) $y = \cosh x$

(3) $y = \tanh x$ (4) $y = \coth x$

Figure 2.21: Fonctions hyperboliques

## 2.6 Applications économiques des fonctions

Nous avons déjà vu l'application économique concernant les droites (paragraphe 2.4), dans laquelle les fonctions d'offre et de demande étaient représentées par des droites. Mais il se peut aussi que ces fonctions soient des paraboles. Ici, c'est uniquement le quadrant I qui est de nouveau pertinent. La fonction de demande est aussi souvent représentée par la branche supérieure d'une hyperbole.

**Exemple 2.16** *Soient les courbes d'offre et de demande suivantes :*

$$\begin{array}{lll} \textit{offre} & : & y = x^2 + 5x + 2 \\ \textit{demande} & : & y = -2x^2 + 3 \end{array}$$

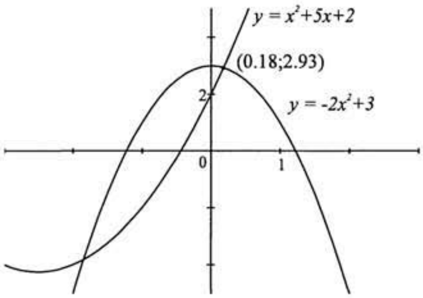



Figure 2.22: Intersection de $y = x^2 + 5x + 2$ et $y = -2x^2 + 3$

*Nous allons chercher l'équilibre du marché. Pour cela, nous résolvons ce système de deux équations en posant l'égalité entre l'équation d'offre et celle de demande :*

$$\begin{array}{c} -2x^2 + 3 = x^2 + 5x + 2 \\ \Rightarrow -3x^2 - 5x + 1 = 0. \end{array}$$

*Nous employons la formule de Viète pour trouver $x_1$ et $x_2$ :*

$$x_1, x_2 = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

*où $a$ est le coefficient de $x^2$, $b$ le coefficient de $x$ et $c$ la constante. Dans notre exemple, nous avons :*

$$x_1, x_2 = \frac{5 \pm \sqrt{25 + 12}}{-6} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{lll} x_1 & \cong & -1.85 \\ x_2 & \cong & 0.18 \end{array} \right.$$

*On remplace ensuite $x_1$ et $x_2$ dans la 1^re^ ou la 2^e^ équation pour trouver $y_1$ et $y_2$ :*

$$\begin{array}{c} y_1 = -2x_1^2 + 3 \cong -3.82 \\ y_2 = -2x_2^2 + 3 \cong 2.93 \end{array}$$

*Les solutions sont* $(-1.85; -3.82)$ *et (0.18; 2.93). Le point d'équilibre est (0.18; 2.93) puisque seul le quadrant I nous intéresse.Nous pouvons vérifier le résultat graphiquement (Figure 2.22).*

**Exemple 2.17** *Cherchons le point d'équilibre des deux fonctions d'offre et de demande suivantes :*

$$\begin{aligned} \textit{offre} \quad &: \quad y = x + 5 \\ \textit{demande} \quad &: \quad y = \frac{10}{(x+1)} - 1 \end{aligned}$$

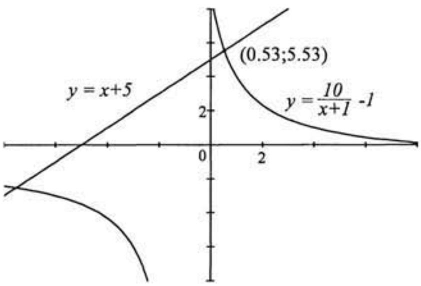



Figure 2.23: Intersection de $y = x + 5$ et $y = \dfrac{10}{x+1} - 1$

*Substituons* $y = x + 5$ *dans la deuxième équation :*

$$\begin{aligned} x + 5 &= \frac{10}{x+1} - 1 \\ (x+5)\cdot(x+1) &= 10 - (x+1) \\ x^2 + 6x + 5 + x - 10 + 1 &= 0 \\ x^2 + 7x - 4 &= 0 \end{aligned}$$

*d'où :*

$$x_1, x_2 = \frac{-7 \pm \sqrt{49+16}}{2} \Rightarrow \begin{cases} x_1 \cong 0.53 \\ x_2 \cong -7.53 \end{cases}$$

*et on remplace dans* $y = x + 5$ *:*

$$\begin{aligned} &y_1 \cong 5.53 \\ &y_2 \cong -2.53 \quad \textit{solution à écarter} \end{aligned}$$

*Le point d'équilibre est donc (0.53; 5.53), qui est représenté sur la figure 2.23.*

Venons-en maintenant à la fonction exponentielle. **Une application économique type de cette fonction est le problème de l'intérêt composé.** Si le taux d'intérêt annuel est de $i$ % et que l'on nous verse les intérêts $k$ fois par année, un capital de $x$ francs va nous donner après $n$ années la somme $y$ suivante :

$$y = x(1 + i/k)^{kn}.$$

Dans cette équation, $x$, $i$ et $k$ sont supposés connus ; la somme $y$ est donc fonction du nombre d'années $n$.

**Exemple 2.18** *On dépose* 10000 *francs à un taux annuel de 4 %. On va calculer la somme que l'on reçoit si les intérêts sont payables une fois par année et s'ils sont payables 4 fois par année.*
*Quand ils sont payables une fois par année,* $x = 10000$ *francs,* $i = 4$ %*, et* $k = 1$. *Nous avons donc l'équation suivante :*

$$y = 10000(1 + 0.04)^n$$

*Pour tracer le graphe de cette fonction représentée dans la figure 2.24, calculons quelques points :*

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| *après 0 année* | : | $y = 10000(1.04)^0$ | = | *10000 francs* |
| *après 1 année* | : | $y = 10000(1.04)^1$ | = | *10400 francs* |
| *après 2 années* | : | $y = 10000(1.04)^2$ | = | *10816 francs* |
| *après 5 années* | : | $y = 10000(1.04)^5$ | = | *12166.53 francs* |
| *après 8 années* | : | $y = 10000(1.04)^8$ | = | *13685.69 francs* |
| *après 10 années* | : | $y = 10000(1.04)^{10}$ | = | *14802.44 francs* |

*Quand les intérêts sont payables 4 fois par année,* $k = 4$*, ce qui donne l'équation suivante :*

$$y = 10000(1 + 0.04/4)^{4n}.$$

*Calculons à nouveau quelques points pour en faire le graphe (Figure 2.25).*

| | | | |
|---|---|---|---|
| *après 0 année* | : | $y = 10000(1.01)^{0 \cdot 4}$ | = *10000 francs* |
| *après 1 année* | : | $y = 10000(1.01)^{1 \cdot 4}$ | = *10406.04 francs* |
| *après 2 années* | : | $y = 10000(1.01)^{2 \cdot 4}$ | = *10828.57 francs* |
| *après 5 années* | : | $y = 10000(1.01)^{5 \cdot 4}$ | = *12201.90 francs* |
| *après 8 années* | : | $y = 10000(1.01)^{8 \cdot 4}$ | = *13749.41 francs* |
| *après 10 années* | : | $y = 10000(1.01)^{10 \cdot 4}$ | = *14888.64 francs* |

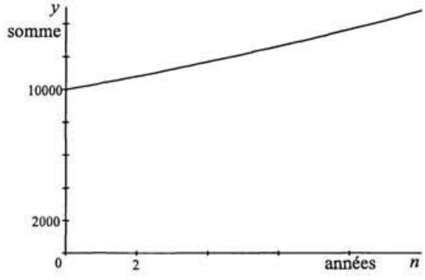



Figure 2.24: Graphe de $y = 10000(1.04)^n$

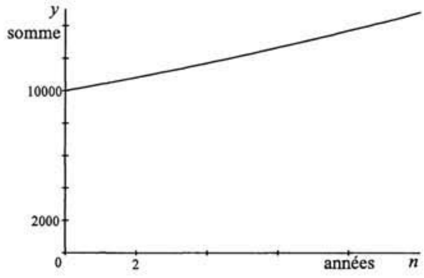



Figure 2.25: Graphe de $y = 10000(1.01)^{4n}$

# Exercices

1. Si le prix d'une montre est de 80 francs, aucune n'est vendue. Si la montre est gratuite, la demande est de 40 montres.
   Quelle est l'équation de la demande?
   Représenter graphiquement cette demande.

2. Trouver le point d'équilibre du marché pour les équations de demande et d'offre suivantes :

$$\begin{array}{lll} \text{demande} & : & y = -5x + 11 \\ \text{offre} & : & y = 2x + 4 \end{array}$$

3. Le point d'équilibre du marché se trouve au point (4 ; 6). La droite représentant la fonction d'offre a une pente de 2 et celle représentant

la fonction de demande passe par le point (0 ; 10).
Déterminer dans ce cas les équations de demande et d'offre.

4. Trouver le point d'équilibre du marché pour les équations de demande et d'offre suivantes :

$$y^2 + y + x - 20 = 0$$
$$2y^2 - x - 3y - 4 = 0$$

Représenter le tout graphiquement.

5. On sait que l'équilibre du marché se situe au point $(2\ ; y_0)$.
La fonction d'offre est donnée par : $y = x^2 + 2$.
La fonction de demande est donnée par : $y = ax^2 + 2x + 6$.
Trouver $a$ et $y_0$.

6. Factoriser et esquisser les graphes des polynômes suivants :

   (a) $P_0(x) = 2$
   (b) $P_1(x) = -x - 2$
   (c) $P_2(x) = -x^2 + 3x + 4$
   (d) $P_3(x) = 2x^3 + 10x^2 + 12x$
   (e) $P_4(x) = x^4 - 10x^2 + 9$

7. Esquisser le graphe des fonctions suivantes :

   (a) $y = \dfrac{x+2}{x^2+1}$.
   (b) $y = x^3 - x + 2$.
   (c) $y = 0.2^x$.
   (d) $y = \log_{0.25} x$.
   (e) $y = log_4 x$.
   (f) Comparer d) et e). Remarques ?
   (g) Que se passe-t-il avec $y = \log_1 x$ ?

8. Soit la fonction : $y = x^\alpha$.
Indiquer le domaine de définition et esquisser le graphe dans le premier quadrant pour :
(a) $\alpha = -\frac{1}{4}$ (b) $\alpha = 0$ (c) $\alpha = \frac{3}{4}$ (d) $\alpha = \frac{4}{5}$ (e) $\alpha = 1$.

9. Après combien d'années un capital de 10 000 francs placé à 5 % (intérêts annuels) double-t-il ?

10. Calculer le capital qui, placé à 3 % pendant 5 ans, a acquis une valeur de 6 000 francs.

11. Une société dispose de 80 000 francs à placer et elle veut récupérer son dépôt après 20 ans. Deux options s'offrent à elle : 5 % d'intérêt payable 2 fois par année ou 4.5 % d'intérêt payable 6 fois par année.
Quelle option a-t-elle intérêt à choisir ?

12. La même société a, cette fois, un capital $C_0$ à déposer. Une première banque lui offre 5 % d'intérêt payable 2 fois par année.
Quel doit être le taux d'intérêt de la seconde banque, si les intérêts sont payables 4 fois par année, pour offrir les mêmes prestations que la première banque ?

13. Un capital de 10 000 francs a été placé pendant 30 ans dans une banque dont les intérêts sont payables 6 fois par année. Ce capital s'élève aujourd'hui à 28 490 francs. À quel taux d'intérêt a-t-il été placé ?



## AL-KHWARIZMI Abu (VIII$^{\text{ème}}$ siècle )

Al-Khwarizmi est né au 8$^{e}$siècle en Perse. Entre 813 et 833, il a rédigé son premier livre d'algèbre dans lequel le vocable *algèbre* apparaît pour la première fois en tant que tel pour désigner une discipline. Al-Khwarizmi a introduit la notion même d'équation du premier et du second degrés. Il est également à l'origine des notions de binôme et trinôme associés à l'équation, au sujet desquels il a examiné l'application des différentes lois de l'arithmétique. C'est également à lui que l'on doit le concept de la solution algorithmique. Le mot algorithme est la prononciation latine du nom d'Al-Khwarizmi, inventeur de l'algèbre.

# Chapitre 3

# Suites, limites et première dérivée

## 3.1 Introduction

Le calcul différentiel concerne l'analyse mathématique du changement ou du mouvement. Du fait que tout bouge dans le monde, le calcul différentiel a des applications dans presque tous les domaines scientifiques. Au début, le calcul différentiel a été développé en physique par Isaac Newton et en géométrie par Gottfried Leibniz.

Les opérations de base du calcul différentiel sont la différentiation et l'intégration ; ces opérations sont inverses l'une de l'autre. La différentiation consiste à déterminer le taux de variation d'une fonction donnée. L'intégration consiste, elle, à trouver une fonction dont le taux de variation est connu. Puisque l'analyse économique est particulièrement sujette au changement, le calcul différentiel est un outil très utilisé pour ces problèmes. L'analyse marginale est peut-être l'application la plus directe du calcul différentiel en économie; le taux marginal de variation est donné par la première dérivée de la fonction. Le calcul différentiel permet aussi la recherche des minima et des maxima. Par conséquent, des problèmes de maximisation de profit ou de minimisation de coût peuvent être résolus à l'aide du calcul différentiel.

Dans ce chapitre, nous allons parler des suites, ce qui va nous amener à la notion de limites. Le concept mathématique d'une limite est fondamental

dans la compréhension du calcul différentiel. Nous allons donner les propriétés des limites utiles pour les prochains paragraphes. Nous aborderons aussi la notion de continuité d'une fonction et finalement nous parlerons de la première dérivée et des dérivées d'ordre supérieur. Le chapitre se termine par un mot sur les différentielles. Les applications diverses des dérivées seront traitées dans le chapitre 4.

## 3.2 Suites

Une **suite** est une succession de termes formés d'après une loi donnée. Par exemple 1, 4, 9, 16 est une suite. Une **suite finie** a un nombre fini de termes. On peut généraliser une suite finie en la représentant de la façon suivante : $u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, \ldots, u_n$.

Une **suite infinie** a un nombre illimité de termes. On note par des points de suspension une suite infinie. Par exemple, si l'on continue indéfiniment à écrire les termes de la suite ci-dessus, on obtient la suite infinie 1, 4, 9, 16,... Avec la représentation généralisée, on a : $u_1, u_2, u_3, u_4, \ldots$

Le **terme général** ou $n^e$ terme a une expression qui indique comment former les différents termes. Dans l'exemple ci-dessus, le terme général est $u_n = n^2$. Le premier terme s'obtient en posant $n = 1$, le deuxième en posant $n = 2$, etc.

- **Suites alternées**

  Une suite **alternée** est une suite où deux termes voisins sont de signes opposés.

**Exemple 3.1** *La suite de terme général* $u_n = (-1)^{n+1} \cdot n$ *est une suite alternée : pour* $n = 1, 2, 3, 4, \ldots$, *nous avons :* $1, -2, 3, -4, \ldots$

- **Suites monotones**

  Une suite peut être **monotone croissante**, c'est-à-dire que chacun de ses termes est plus grand que son prédécesseur :

$$u_{n+1} > u_n, \ \forall n \geq 1,$$

ou **monotone décroissante**, c'est-à-dire :

$$u_{n+1} < u_n, \ \forall n \geq 1.$$

**Note** Si $u_{n+1} \geq u_n$, $\forall n \geq 1$, on dira simplement que la suite est croissante et si $u_{n+1} \leq u_n$, $\forall n \geq 1$, on dira qu'elle est décroissante.

**Exemple 3.2** *La suite des fractions :* $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots$ *est monotone décroissante.*
*En effet :* $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} = \frac{-1}{n \cdot (n+1)} < 0, \ \forall n \geq 1.$
*Par conséquent :* $u_{n+1} < u_n, \ \forall n \geq 1.$

- **Suites bornées**

  Une suite est dite **bornée** s'il existe deux nombres $k$ et $K$ tels que $k \leq u_n \leq K$, $\forall n \geq 1$, c'est-à-dire si aucun de ses termes n'est plus petit que la valeur $k$ et si aucun de ses termes n'est plus grand que $K$. Un tel $k$ est appelé **minorant** et $K$ est appelé **majorant** de la suite. Le plus grand des minorants est appelé **borne inférieure** et le plus petit des majorants **borne supérieure**.

**Exemple 3.3** *La suite* $\frac{-1}{2}, 0, \frac{1}{6}, \frac{1}{4}, \ldots$ *qui est définie par* $u_n = \frac{n-2}{2n}$ *est une suite bornée car aucun de ses termes n'est inférieur à* $\frac{-1}{2}$ *ni supérieur à* $\frac{1}{2}$.
*Nous avons* $\frac{-1}{2} \leq u_n \leq \frac{1}{2}, \forall n \geq 1.$

- **Suites arithmétiques**

  Dans une suite arithmétique, la différence entre deux termes consécutifs est **constante** et **non nulle** : $u_{n+1} - u_n = d, \forall n \geq 1$.

  $d$ est appelé la **raison** de la suite. Si $d$ est positif, la suite est monotone croissante, s'il est négatif, elle est monotone décroissante. On peut représenter une suite arithmétique de la façon suivante :

$$
\begin{aligned}
u_1 &= u_1 \\
u_2 &= u_1 + d \\
u_3 &= u_2 + d = u_1 + d + d \\
u_4 &= u_3 + d = u_1 + d + d + d \\
&\vdots \\
u_n &= u_{n-1} + d = u_1 + (n-1) \cdot d \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

**Exemple 3.4** *La suite arithmétique* $33, 41, 49, \ldots$ *a pour raison* $d = 8$ *et comme premier terme* $u_1 = 33$. *Si l'on veut connaître son 100ᵉ terme, on remplace* $n$ *par 100 dans* $u_n = u_1 + (n-1) \cdot d$ *et l'on obtient :*

$$u_{100} = 33 + 99 \cdot 8 = 825.$$

Une suite arithmétique infinie est toujours non-bornée.

- **Suites géométriques**

  Dans une suite géométrique, le **rapport** entre deux termes consécutifs est **constant** et **différent de 1** : $\frac{u_{n+1}}{u_n} = q$, où $q$ est appelé la **raison** de la suite. Si $q$ est positif, tous les termes ont le même signe que $u_1$ ; si $q$ est négatif, la suite est alternée. Les suites géométriques sont bornées si $| q | \leq 1$ et non bornées si $| q | > 1$. On peut représenter une suite géométrique de la façon suivante :

$$\begin{aligned}
u_1 &= u_1 \\
u_2 &= u_1 \cdot q \\
u_3 &= u_2 \cdot q = u_1 \cdot q \cdot q \\
u_4 &= u_3 \cdot q = u_1 \cdot q \cdot q \cdot q \\
&\vdots \\
u_n &= u_{n-1} \cdot q = u_1 \cdot q^{n-1} \\
&\vdots
\end{aligned}$$

**Exemple 3.5** *La suite géométrique* $2, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \ldots$ *a pour raison* $q = \frac{1}{2}$ *et comme premier terme* $u_1 = 2$. *Si l'on veut connaître son 10ᵉ terme, on remplace* $n$ *par 10 dans* $u_n = u_1 \cdot q^{n-1}$ *et l'on obtient :*

$$u_{10} = 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^9 = \frac{1}{256}.$$

*La suite est bornée car* $q = \frac{1}{2} < 1$. *La suite* $u_n$ *est donc comprise entre 2 et 0 :* $0 \leq u_n \leq 2, \ \forall n \geq 1$.

## 3.3 Convergence et divergence des suites

Nous allons étudier ici le comportement de la suite $(u_n)$ lorsque "$n$ tend vers l'infini", c'est-à-dire lorsqu'on considère des valeurs de $n$ arbitrairement grandes.

Dire que $u_n$ tend vers une limite $l$ lorsque $n$ tend vers l'infini revient à dire que la différence entre $u_n$ et $l$, $| u_n - l |$, devient aussi petite que l'on veut, pourvu que $n$ soit assez grand.

Par conséquent, si on se donne un nombre réel $\varepsilon > 0$ arbitrairement petit, on doit pouvoir trouver un nombre $N(\varepsilon)$ (qui dépend de $\varepsilon$) tel que $| u_n - l | < \varepsilon$ si $n$ est plus grand que $N(\varepsilon)$. Ce qui nous amène à la définition suivante :

**Définition 3.1** *Une suite $(u_n)$ est dite* ***convergente vers la limite l*** *si à tout nombre* ***$\varepsilon$ positif*** *arbitrairement petit correspond un nombre $N(\varepsilon)$ tel que l'inégalité $| u_n - l | < \varepsilon$ soit satisfaite par tous les termes $u_n$ de la suite avec $n > N(\varepsilon)$.*

Si la suite $(u_n)$ converge vers la limite $l$, on écrit :

$$\lim_{n \to \infty} u_n = l$$

et on lit "la limite de $u_n$ quand $n$ tend vers l'infini est $l$".

Des suites qui ne convergent pas sont dites divergentes.

**Exemple 3.6** *Si nous reprenons la suite de l'exemple 3.3 définie par $u_n = \dfrac{n-2}{2n}$, nous voyons que ses termes s'approchent de $\dfrac{1}{2}$ quand $n$ augmente.*
*Nous pouvons donc obtenir un nombre aussi proche de $\dfrac{1}{2}$ que nous le voulons en allant suffisamment loin dans la suite. Si, par exemple, l'écart avec $\dfrac{1}{2}$ doit être plus petit que $\varepsilon = 0.01$, alors on doit avoir :*

$$\left| u_n - \frac{1}{2} \right| = \left| \frac{n-2}{2n} - \frac{1}{2} \right| = \left| \frac{n-2-n}{2n} \right| = \left| \frac{-2}{2n} \right| = \frac{1}{n} < 0.01$$

*il en résulte que tous les termes $u_n$ avec $n > 100$ ont la propriété demandée. Pour cet exemple, on a de façon générale $\left| u_n - \dfrac{1}{2} \right| < \varepsilon$ dès que $n > \dfrac{1}{\varepsilon}$, c'est-à-dire ici $N(\varepsilon) = \dfrac{1}{\varepsilon}$.*

**Exemple 3.7** *Reprenons la suite* $1, 4, 9, 16, etc.$, *où l'on constate que les nombres croissent* ***sans limite*** *quand* $n$ *augmente. En effet, en choisissant un nombre quelconque aussi grand que nous le voulons, nous pouvons toujours trouver dans la suite un nombre qui le dépasse. On dit que les nombres d'une telle suite* ***tendent vers l'infini*** *et l'on écrit :*

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} n^2 = \infty.$$

*Dans ce cas, la suite* ***diverge***.

Dans les deux exemples précédents, les suites étaient des suites monotones croissantes, mais il est possible d'avoir des suites convergentes ou divergentes lorsque ces suites sont monotones décroissantes.

**Exemple 3.8** *Soit la suite de terme général* $u_n = \dfrac{n+2}{n}$ *dont les premiers termes sont :* $3, 2, \frac{5}{3}, \frac{3}{2}, \frac{7}{5}, \frac{4}{3}, \ldots$
*Montrons que cette suite est monotone décroissante : pour cela, il faut montrer que* $u_{n+1} < u_n, \ \forall n \geq 1$. *On a :*

$$u_{n+1} - u_n = \frac{n+3}{n+1} - \frac{n+2}{n} = \frac{n^2 + 3n - n^2 - 3n - 2}{n \cdot (n+1)} = \frac{-2}{n \cdot (n+1)} < 0, \quad \forall n \geq 1.$$

*Les nombres de la suite tendent vers une valeur limite (en décroissant vers elle) lorsque* $n$ *augmente. Montrons que cette limite est égale à 1.*
*Par définition, il faut trouver* $N(\varepsilon)$ *tel que : si l'on prend* $n > N(\varepsilon)$ *alors* $\left|\dfrac{n+2}{n} - 1\right| < \varepsilon$, *et cela quel que soit* $\varepsilon > 0$.
*Comme* $\left|\dfrac{n+2}{n} - 1\right| = \left|\dfrac{n+2-n}{n}\right| = \dfrac{2}{n}$, *l'inégalité s'écrit :* $\dfrac{2}{n} < \varepsilon$, *c'est-à-dire* $n > \dfrac{2}{\varepsilon}$. *Il suffit donc de prendre* $N(\varepsilon) = \dfrac{2}{\varepsilon}$.
*En effet, dans ce cas :* $n > N(\varepsilon) = \dfrac{2}{\varepsilon} \Rightarrow \dfrac{2}{n} < \varepsilon \Rightarrow \left|\dfrac{n+2}{n} - 1\right| < \varepsilon$.
*Nous avons donc :* $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{n+2}{n} = 1$.

**Exemple 3.9** *Considérons la suite* $(u_n)$ *définie par* $u_n = -2n$, *représentée par ses premiers termes :* $-2, -4, -6, -8, \ldots$
*Cette suite est monotone décroissante puisque :*

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= -2(n+1) - (-2n) \\ &= -2n - 2 + 2n \\ &= -2 < 0, \ \forall n \geq 1. \end{aligned}$$

*Les nombres décroissent sans limite quand* $n$ *augmente. On dit que* ***la suite tend vers moins l'infini*** *et on écrit :* $\lim_{n\to\infty}(-2n) = -\infty$.

Finalement, nous avons des suites qui ne sont ni croissantes ni décroissantes et qui peuvent soit converger soit diverger.

**Exemple 3.10** *La suite* $u_n = \dfrac{(-1)^{n+1}}{n^2}$ *est une suite alternée (donc ni croissante ni décroissante) qui est convergente. Sa limite vaut 0 :*
*En effet, montrons que si* $n > N(\varepsilon) = \dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$, *alors* $\left|\dfrac{(-1)^{n+1}}{n^2} - 0\right| < \varepsilon$ *:*

$$\begin{aligned} n &> N(\varepsilon) = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \\ &\Rightarrow \frac{1}{n} < \sqrt{\varepsilon} \\ &\Rightarrow \frac{1}{n^2} < \varepsilon \\ &\Rightarrow \left|\frac{(-1)^{n+1}}{n^2} - 0\right| = \frac{1}{n^2} < \varepsilon. \end{aligned}$$

**Exemple 3.11** *La suite* $u_n = (-1)^n$ *est aussi alternée, mais elle est divergente. En effet, les nombres de la suite valent alternativement* $-1$ *ou* $1$ *selon que* $n$ *est pair ou impair ; ils oscillent de* $-1$ *à* $1$ *sans tendre vers une limite. La suite est alors* ***oscillante*** *et on dit qu'elle diverge.*

Pour résumer, une suite peut avoir les comportements suivants :
Elle peut : 1) tendre vers l'infini
2) tendre vers moins l'infini
3) osciller sans tendre vers une limite
4) tendre vers une limite finie.

Dans les trois premiers cas, la suite est divergente et dans le quatrième cas, elle est convergente. On notera qu'**une suite convergente a une limite unique**.

- **Critères de convergence pour les suites**

  Il est possible de déterminer, à partir de la définition de la convergence, si un nombre $l$ est la limite d'une suite $(u_n)$. En revanche, si l'on ne connait pas $l$, on se sert de **critères de convergence** qui permettent de déterminer si une suite converge ou diverge :

  **Premier critère :** une suite croissante respectivement décroissante et bornée est toujours convergente.

  Ce critère ne s'applique qu'aux suites croissantes ou décroissantes. En revanche, le second critère de convergence (dû à Cauchy) est valable pour toutes les suites.

  **Second critère :** une suite $(u_n)$ est convergente si et seulement si pour tout nombre positif $\varepsilon$, il existe un nombre $N(\varepsilon)$ tel que $\mid u_n - u_m \mid < \varepsilon$ pour tous les indices $m$ et $n$ plus grand que $N(\varepsilon)$. On parle alors de suite de Cauchy.

**Exemple 3.12** *Soit la suite donnée par :* $u_n = 1 - \dfrac{1}{3n}$.
*Comme* $0 \leq \dfrac{1}{3n} \leq \dfrac{1}{3}$, $\forall n \geq 1$, *on a :* $\dfrac{2}{3} \leq u_n \leq 1$, $\forall n \geq 1$ *; par conséquent, la suite est bornée. En outre,*

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= 1 - \frac{1}{3(n+1)} - (1 - \frac{1}{3n}) \\ &= \frac{1}{3n} - \frac{1}{3(n+1)} \\ &= \frac{3}{3n(3n+3)} > 0, \ \forall n \geq 1. \end{aligned}$$

*Il s'agit donc d'une suite monotone croissante et bornée. Par le premier critère de convergence, cette suite converge.*

**Exemple 3.13** *Soit la suite définie par* $u_n = \dfrac{(-1)^n}{3n}$. *Comme cette suite n'est pas monotone, la premier critère n'est pas applicable. En revanche, on peut*

*utiliser le deuxième critère :*

$$\begin{aligned} |u_n - u_m| &= \left|\frac{(-1)^n}{3n} - \frac{(-1)^m}{3m}\right| \\ &\leq \left|\frac{(-1)^n}{3n}\right| + \left|\frac{(-1)^m}{3m}\right| \\ &= \frac{1}{3n} + \frac{1}{3m} < \varepsilon \end{aligned}$$

*dès que* $n > \frac{2}{3\varepsilon}$ *et* $m > \frac{2}{3\varepsilon}$.
*En effet,*

$$\begin{aligned} & n > \frac{2}{3\varepsilon} \quad et \quad m > \frac{2}{3\varepsilon} \\ \Rightarrow \quad & \frac{1}{n} < \frac{3\varepsilon}{2} \quad et \quad \frac{1}{m} < \frac{3\varepsilon}{2} \\ \Rightarrow \quad & \frac{1}{3n} < \frac{\varepsilon}{2} \quad et \quad \frac{1}{3m} < \frac{\varepsilon}{2} \\ \Rightarrow \quad & | u_n - u_m | \leq \frac{1}{3n} + \frac{1}{3m} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

*Il existe donc bien un nombre* $N(\varepsilon) = \frac{2}{3\varepsilon}$ *tel que* $| u_n - u_m | < \varepsilon$ *dès que* $n > N(\varepsilon)$ *et* $m > N(\varepsilon)$*, et cela quel que soit* $\varepsilon > 0$*. Par conséquent, la suite converge.*

- **Règles de calculs**

  Si les suites $(u_n)$ et $(v_n)$ ont les limites $l_1$ respectivement $l_2$, alors :

  1. $\lim\limits_{n\to\infty}(u_n + v_n) = l_1 + l_2$.
  2. $\lim\limits_{n\to\infty}(u_n - v_n) = l_1 - l_2$.
  3. $\lim\limits_{n\to\infty}(u_n \cdot v_n) = l_1 \cdot l_2$.
  4. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n} = \frac{l_1}{l_2}$, si $l_2 \neq 0, v_n \neq 0$.
  5. $\lim\limits_{n\to\infty} c \cdot u_n = c \cdot \lim\limits_{n\to\infty} u_n = c \cdot l_1$ où $c$ est une constante.

- **Limites de quelques suites convergentes importantes**

  Comme il n'existe pas de méthode générale pour déterminer la limite d'une suite, il est utile d'indiquer la limite de quelques suites convergentes (Tableau 3.1) :

| $u_n$ | $\lim\limits_{n\to\infty} u_n$ | $u_n$ | $\lim\limits_{n\to\infty} u_n$ |
|---|---|---|---|
| $1/n$ | 0 | $\sqrt[n]{n}$ | 1 |
| $\frac{1}{n^\alpha}, \alpha > 0$ | 0 | $(1+\frac{1}{n})^n$ | $e = 2.71828\ldots$ |
| $\sqrt[n]{q}, q > 0$ | 1 | $\frac{\log_b n}{n}, b > 0, b \neq 1$ | 0 |
| $q^n, \mid q \mid < 1$ | 0 | $\frac{\log_b n}{n^\alpha}, b > 0, b \neq 1, \alpha > 0$ | 0 |

Tableau 3.1: Quelques limites de suites

## 3.4 Limite d'une fonction

Nous pouvons maintenant étendre le **concept de limite** aux fonctions. Nous allons étudier les différents cas de limite de fonction en considérant un certain nombre d'exemples.

- **Limite d'une fonction à l'infini**

**Exemple 3.14** *Les valeurs de la fonction* $y = f(x) = 2 - \frac{1}{x}$ *se rapprochent arbitrairement du nombre 2 quand* $x$ *est choisi suffisamment grand comme le montre le tableau suivant :*

| $x$ | 1 | 2 | 3 | ... | 20 | ... |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | 1 | 3/2 | 5/3 | ... | 39/20 | ... |

*Par exemple, la différence entre 2 et les valeurs de la fonction est plus petite que 0.05 pour tout* $x$ *plus grand que 20. Plus généralement,* $\mid f(x) - 2 \mid < \varepsilon$ *pour tout* $x > \frac{1}{\varepsilon}$.
*Représentons graphiquement la situation (Figure 3.1).*

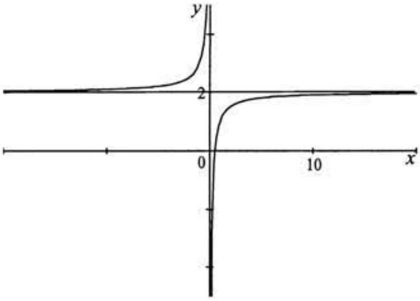



Figure 3.1: Graphe de $y = 2 - \dfrac{1}{x}$

Cet exemple montre que la notion de limite peut être étendue au cas des abscisses croissant vers l'infini (ou décroissant vers moins l'infini).

**Définition 3.2** *$f(x)$ admet la limite $L$ lorsque $x$ tend vers plus l'infini si pour tout nombre $\varepsilon > 0$, il existe $\nu(\varepsilon) > 0$ tel que $\mid f(x) - L \mid < \varepsilon$ dès que $x > \nu(\varepsilon)$. On écrit dans ce cas:*

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = L.$$

*De même: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = L$ si pour tout nombre $\varepsilon > 0$, il existe $\nu(\varepsilon) > 0$ tel que $\mid f(x) - L \mid < \varepsilon$ dès que $x < -\nu(\varepsilon)$.On écrit dans ce cas:*

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = L.$$

Dans l'exemple 3.14, $f(x) = 2 - \dfrac{1}{x}$. Dans ce cas, on a:

$$\mid f(x) - 2 \mid = \left|2 - \frac{1}{x} - 2\right| = \left|\frac{1}{x}\right| < \varepsilon \Leftrightarrow x > \frac{1}{\varepsilon} \quad \text{ou} \quad x < -\frac{1}{\varepsilon}.$$

Dans cet exemple, $\nu(\varepsilon) = \dfrac{1}{\varepsilon}$ et on a: $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 2$ et $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 2$.
On écrit en abrégé: $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = 2$.

**Définition 3.3** *On dit que $f(x)$ tend vers l'infini lorsque $x$ tend vers l'infini si pour tout nombre $N > 0$, il existe $\nu(N) > 0$ tel que $f(x) > N$ pour tout $x > \nu(N)$. On écrit:*

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty.$$

*De même :* $\lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty$ *si pour tout nombre* $N > 0$*, il existe* $\nu(N) > 0$ *tel que* $f(x) < -N$ *pour tout* $x > \nu(N)$.
*D'autre part, on définit :* $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty$ *si pour tout nombre* $N > 0$*, il existe* $\nu(N) > 0$ *tel que* $f(x) > N$ *pour tout* $x < -\nu(N)$.
*De façon analogue :* $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ *si pour tout nombre* $N > 0$*, il existe* $\nu(N) > 0$ *tel que* $f(x) < -N$ *pour tout* $x < -\nu(N)$.

**Exemple 3.15** $\lim_{x\to\infty} x^2 = \infty$ *; en effet, pour tout* $x > \sqrt{N}$, $x^2 > N$ *et cela quel que soit* $N > 0$.
*D'autre part,* $\lim_{x\to-\infty} x^2 = \infty$ *; en effet, pour tout* $x < -\sqrt{N}$, $x^2 > N$ *et cela quel que soit* $N > 0$ *(ici* $\nu(N) = \sqrt{N}$*).*
*Ainsi :* $\lim_{x\to\pm\infty} x^2 = \infty$.

Il peut arriver que la fonction $y = f(x)$ ne tende ni vers une limite finie ni vers l'infini lorsque $x$ tend vers l'infini.

**Exemple 3.16** *La fonction* $f(x) = \cos x$ *est définie dans l'intervalle* $]-\infty; \infty[$*, mais ne tend pas vers une limite finie ou vers l'infini lorsque* $x$ *tend vers l'infini (Figure 3.2).*

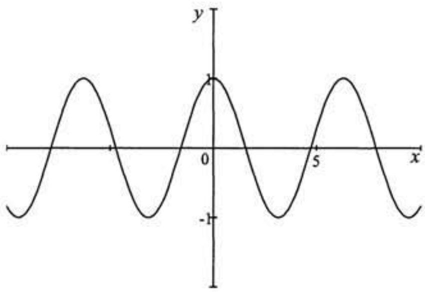



Figure 3.2: Graphe de $y = \cos x$

- **Limite en un point**

  Étudions à présent le cas où la variable indépendante tend vers une limite $a$. Si la valeur $f(x)$ se rapproche de plus en plus du nombre $L$

lorsque $x$ se rapproche de la valeur $a$, on dit que la fonction $f(x)$ tend vers la limite $L$ lorsque $x$ tend vers $a$ et on écrit : $\lim_{x \to a} f(x) = L$.

Autrement dit, la différence $\mid f(x) - L \mid$ peut être rendue aussi petite que l'on veut pourvu que $x$ soit suffisamment proche de $a$, ce qui est formalisé dans la définition suivante.

**Définition 3.4** *La fonction $f(x)$ admet la limite $L$ lorsque $x$ tend vers $a$, si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta(\varepsilon) > 0$ tel que $\mid f(x) - L \mid < \varepsilon$ si $0 < \mid x - a \mid < \delta(\varepsilon)$.*

**Exemple 3.17** *Montrons que : $\lim_{x \to 3}(2x + 6) = 12$.*
*Soit $\varepsilon > 0$ ; on a :*
$\mid f(x) - 12 \mid = \mid 2x + 6 - 12 \mid = \mid 2x - 6 \mid = 2 \mid x - 3 \mid < \varepsilon$ *si* $0 < \mid x - 3 \mid < \frac{\varepsilon}{2}$.
*Il existe donc bien un nombre $\delta(\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{2}$ tel que si $0 < \mid x - 3 \mid < \delta(\varepsilon)$, alors $\mid (2x + 6) - 12 \mid < \varepsilon$ et cela quel que soit $\varepsilon > 0$.*

- **Limites infinies**

**Exemple 3.18** *Considérons la fonction $f(x) = \frac{1}{x^4}$. Quand $x$ tend vers 0, les valeurs de la fonction $f(x) = \frac{1}{x^4}$ deviennent de plus en plus grandes. On écrit : $\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^4} = \infty$ et l'on dit que la fonction a pour limite plus l'infini quand $x$ tend vers 0. Le graphe de $f(x) = \frac{1}{x^4}$ est représenté dans la figure 3.3.*

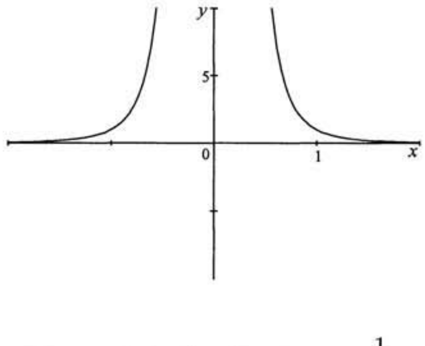



Figure 3.3: Graphe de $y = \frac{1}{x^4}$

**Définition 3.5** *On dit que $f(x)$ tend vers plus l'infini lorsque $x$ tend vers $a$, si pour tout $N > 0$ il existe $\delta(N) > 0$ tel que $f(x) > N$ si $0 <| x-a |< \delta(N)$ et on écrit :* $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$ . *De façon analogue, on définit :* $\lim_{x\to a} f(x) = -\infty$ , *si pour tout $N > 0$, il existe $\delta(N) > 0$ tel que $f(x) < -N$ si $0 <| x-a |< \delta(N)$.*

Montrons que selon la définition 3.5, on a : $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^4} = \infty$.

Soit un nombre $N > 0$ ; il s'agit de trouver un nombre $\delta(N) > 0$ tel que $\frac{1}{x^4} > N$ si $0 <| x |< \delta(N)$. Si $| x |< \frac{1}{\sqrt[4]{N}}$, alors $x^4 < \frac{1}{N}$ et donc $\frac{1}{x^4} > N$. Ainsi, en prenant $\delta(N) = \frac{1}{\sqrt[4]{N}}$, on a bien : $\frac{1}{x^4} > N$ si $0 <| x |< \frac{1}{\sqrt[4]{N}}$ et cela quel que soit $N > 0$.

- **Limite à droite et limite à gauche**

  Il peut être important, lorsqu'on calcule la limite en un point $a$, de savoir si $x$ approche la valeur $a$ en croissant, c'est-à-dire à gauche, ou en décroissant, c'est-à-dire à droite.

**Exemple 3.19** *Considérons la fonction $y = f(x) = \frac{1}{x}$ (Figure 3.4).*

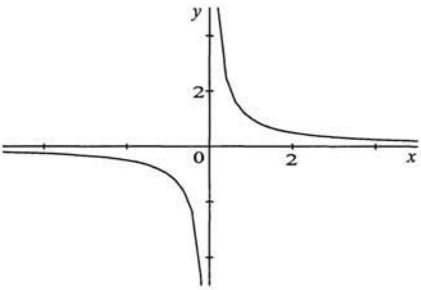



Figure 3.4: Graphe de $y = \frac{1}{x}$

*Lorsque $x$ s'approche de 0 par valeur positive, les valeurs de la fonction $f(x) = \frac{1}{x}$ deviennent de plus en plus grandes. On écrit :* $\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = \infty$. *Lorsque*

*$x$ s'approche de 0 par valeur négative, les valeurs de $f(x)$ deviennent plus petites que n'importe quel nombre. On écrit :* $\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$. *Le tableau suivant permet de tracer le graphe de cette fonction :*

| $x$ | $\ldots -1/2$ | $-1/10$ | $-1/50$ | $0$ | $1/50$ | $1/10$ | $1/2\ldots$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | $\ldots -2$ | $-10$ | $-50$ | | $50$ | $10$ | $2\ldots$ |

**Exemple 3.20** *Considérons la fonction* $f(x) = \frac{|x|}{x}$. *Elle n'est pas définie en* $x = 0$, *mais* $\lim_{x \to 0^+} \frac{|x|}{x} = 1$ *et* $\lim_{x \to 0^-} \frac{|x|}{x} = -1$, *puisque*

$$f(x) = \begin{cases} \textit{1 si } x > 0. \\ \textit{-1 si } x < 0. \end{cases}$$

*Ainsi, la limite à gauche qui vaut $-1$ et la limite à droite qui vaut 1 sont différentes (Figure 3.5).*

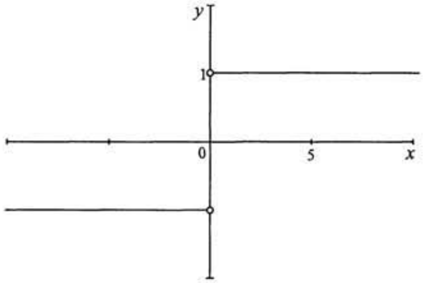



Figure 3.5: Graphe de $y = \frac{|x|}{x}$

**Définition 3.6** *On dit que $f(x)$ admet la limite à droite $L^+$ lorsque $x$ tend vers $a$ par la droite, si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta(\varepsilon)$ tel que $| f(x) - L^+ | < \varepsilon$ si $| x - a | < \delta$ et $x > a$. On note* $L^+ = \lim_{x \to a^+} f(x)$.

*On définit de la même manière la limite à gauche $L^-$ lorsque $x$ tend vers $a$ par la gauche (cette fois avec $x < a$) et on écrit* $L^- = \lim_{x \to a^-} f(x)$.

**Remarque** La limite d'une fonction lorsque $x$ tend vers $a$ existe si et seulement si la limite à droite et la limite à gauche existent et sont identiques. Dans ce cas :

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to a} f(x) .$$

## 3.5 Propriétés de la limite d'une fonction

Comme pour les limites de suites, on a les propriétés suivantes pour les limites d'une fonction :

Si $\lim_{x \to a} f(x) = L_1$, $\lim_{x \to a} g(x) = L_2$ et si $c$ est une constante, alors :

1. $\lim_{x \to a} c = c$

2. $\lim_{x \to a} c \cdot f(x) = c \cdot L_1$

3. $\lim_{x \to a} (f(x) \pm g(x)) = \lim_{x \to a} f(x) \pm \lim_{x \to a} g(x) = L_1 \pm L_2$

4. $\lim_{x \to a} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \to a} f(x) \cdot \lim_{x \to a} g(x) = L_1 \cdot L_2$

5. $\lim_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim_{x \to a} f(x)}{\lim_{x \to a} g(x)} = \dfrac{L_1}{L_2}$, si $L_2 \neq 0$

Il faut noter que ces propriétés ne sont pas nécessairement valables quand la limite de l'une ou l'autre des fonctions $f(x)$ ou $g(x)$ est infinie. Nous verrons comment traiter ces différents cas dans le chapitre suivant. En revanche, ces propriétés sont valables dans le cas où les limites sont définies uniquement soit à droite soit à gauche de $a$, ou lorsque $x$ tend vers l'infini. Finalement, les propriétés 3 et 4 peuvent être généralisées à un nombre fini de fonctions.

**Exemple 3.21**
$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2+3}{x} = \frac{\lim\limits_{x\to 2} x^2+3}{\lim\limits_{x\to 2} x} \quad \textit{(propriété 5)}$$
$$= \frac{\lim\limits_{x\to 2} x^2+\lim\limits_{x\to 2} 3}{\lim\limits_{x\to 2} x} \quad \textit{(propriété 3)}$$
$$= \frac{\lim\limits_{x\to 2} x\cdot\lim\limits_{x\to 2} x+\lim\limits_{x\to 2} 3}{\lim\limits_{x\to 2} x} \quad \textit{(propriété 4)}$$
$$= \frac{2\cdot 2+3}{2} \quad \textit{(propriétés 1 et 2)}$$
$$= \frac{7}{2}.$$

En appliquant la propriété 5 concernant la limite d'un quotient, il peut arriver que le quotient des limites donne comme résultat $\frac{0}{0}$. Cette forme $\frac{0}{0}$ est appelée forme **indéterminée**. On ne peut a priori rien dire de la division de zéro par zéro. Il est cependant possible de déterminer si une telle expression possède une limite, comme le montrent les exemples suivants.

**Exemple 3.22** *Calculons* $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{x}$. *Il s'agit d'une forme indéterminée* $\frac{0}{0}$ *puisque la limite du dénominateur et du numérateur sont toutes deux nulles. Cependant, si* $x\neq 0$, *numérateur et dénominateur peuvent être divisés par* $x$. *Dans ce cas :* $\frac{x^2}{x}=x,\ \forall x\neq 0$.
*Dans la définition de la limite d'une fonction lorsque* $x$ *tend vers* $a$, *on suppose que* $x$ *devient arbitrairement proche de* $a$, *mais n'est pas égal à* $a$. *C'est pourquoi, on peut écrire :* $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{x}=\lim\limits_{x\to 0} x = 0$.
*Ainsi, bien que* $f(x)=\dfrac{x^2}{x}$ *ne soit pas définie en* $x=0$, *cette fonction admet pour limite zéro lorsque* $x$ *tend vers zéro.*

**Exemple 3.23** *Si* $f(x)=\dfrac{x^2-16}{x+4}$, *alors* $\lim\limits_{x\to -4}\dfrac{x^2-16}{x+4}$ *est une forme indéterminée* $\dfrac{0}{0}$. *Si* $x\neq -4$, *on a :* $\dfrac{x^2-16}{x+4}=\dfrac{(x+4)(x-4)}{x+4}=x-4$.
*D'après la définition de la limite, on peut écrire :*
$$\lim_{x\to -4}\frac{x^2-16}{x+4}=\lim_{x\to -4}\frac{(x+4)(x-4)}{x+4}=\lim_{x\to -4}(x-4)=-8.$$

On peut rencontrer un autre type de forme indéterminée en utilisant la propriété 5. Il s'agit de la forme indéterminée $\frac{\infty}{\infty}$. Dans ce cas aussi, il est possible de déterminer si une telle expression admet une limite.

**Exemple 3.24** *Si* $f(x) = \dfrac{2x^3 + 5x^2 + 6}{x^3 - 3x + 9}$, *alors* $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{2x^3 + 5x^2 + 6}{x^3 - 3x + 9}$ *est une forme indéterminée* $\frac{\infty}{\infty}$. *Dans ce cas, on peut diviser numérateur et dénominateur par le terme de plus grande puissance du dénominateur, c'est-à-dire* $x^3$. *Si* $x \neq 0$, *nous obtenons* $f(x) = \dfrac{2 + \frac{5}{x} + \frac{6}{x^3}}{1 - \frac{3}{x^2} + \frac{9}{x^3}}$. *Nous pouvons, dès lors, déterminer cette limite :*

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to \infty} \frac{2x^3 + 5x^2 + 6}{x^3 - 3x + 9} &= \lim_{x \to \infty} \frac{2 + \frac{5}{x} + \frac{6}{x^3}}{1 - \frac{3}{x^2} + \frac{9}{x^3}} \\
&= \frac{\lim\limits_{x \to \infty} 2 + 5 \lim\limits_{x \to \infty} \frac{1}{x} + 6 \lim\limits_{x \to \infty} \frac{1}{x^3}}{\lim\limits_{x \to \infty} 1 - 3 \lim\limits_{x \to \infty} \frac{1}{x^2} + 9 \lim\limits_{x \to \infty} \frac{1}{x^3}} \\
&= \frac{2 + 5 \cdot 0 + 6 \cdot 0}{1 - 3 \cdot 0 + 9 \cdot 0} \\
&= 2.
\end{aligned}$$

## 3.6 Quelques limites importantes

Pour déterminer la limite d'une fonction, il n'existe pas de méthode générale. Par conséquent, nous indiquons ici quelques limites importantes.

1. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$
2. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\tan x}{x} = 1$
3. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$
4. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(1 + x)}{x} = 1$

5. $\lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x} = e$

6. $\lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x = e$

7. $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{a}{x}\right)^x = e^a$

8. $\lim_{x\to\infty}\frac{x^k}{a^x} = 0,\ \ a > 0$

9. $\lim_{x\to\infty}\frac{a^x}{x^x} = 0,\ \ a > 0$

10. $\lim_{x\to\infty}\frac{\ln\left(x^k\right)}{x^m} = 0,\ \ m > 0$

## 3.7 Continuité des fonctions

Intuitivement, la notion de continuité d'une fonction sur un intervalle se conçoit comme une courbe qui n'est interrompue nulle part. Cependant, cette notion intuitive est trop imprécise pour pouvoir être utilisée pratiquement; il s'agit donc de définir avec précision cette notion et cela peut se faire en se basant sur la notion de limite définie précédemment.

**Définition 3.7** *Une fonction $f(x)$ est dite* ***continue au point*** $x = a$, *si les trois conditions suivantes sont satisfaites simultanément :*

1. *$f(a)$ est défini.*
2. *$\lim_{x\to a} f(x)$ existe.*
3. *$\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$.*

En tenant compte de la définition 3.4, la définition ci-dessus peut se mettre sous la forme : une fonction $f(x)$ est dite continue en $x = a$ si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un nombre $\delta(\varepsilon)$ tel que $\mid f(x)-f(a) \mid < \varepsilon$ si $\mid x-a \mid < \delta(\varepsilon)$.

On dit qu'une fonction $f(x)$ est **discontinue en $x = a$**, si elle n'est pas continue en $x = a$.

Comme pour les limites, on définit la **continuité à gauche** en un point : $f(x)$ est continue à gauche en $x = a$ si $\lim_{x \to a^-} f(x) = f(a)$. De la même manière, on définit la **continuité à droite** en un point : $f(x)$ est continue à droite en $x = a$, si $\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a)$.

**Exemple 3.25** *La fonction $f(x) = \sqrt{x}$ a pour domaine de définition : $\{x \in \mathbb{R}_+$ noté $[0; \infty[$. On a $f(0) = \sqrt{0} = 0$. Mais $\lim_{x \to 0} \sqrt{x}$ n'existe pas car $\lim_{x \to o^-} \sqrt{x}$ n'existe pas ; en effet, pour $x < 0, \sqrt{x}$ n'est pas défini dans l'ensemble des nombres réels. En revanche, $\lim_{x \to 0^+} \sqrt{x} = 0$. Par conséquent, la fonction $f(x) = \sqrt{x}$* ***est continue à droite en $x = 0$.***

**Définition 3.8** *On dit d'une fonction qu'elle est continue sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ si elle est continue en chaque point de cet intervalle. Si une fonction est continue sur tout son domaine de définition, on dit simplement qu'elle est continue.*

**Remarque** Si **le domaine de définition** d'une fonction $f(x)$ est un **intervalle fermé** $[a; b]$, alors $\lim_{x \to a} f(x)$ et $\lim_{x \to b} f(x)$ n'existent pas, puisque $\lim_{x \to a^-} f(x)$ et $\lim_{x \to b^+} f(x)$ n'existent pas. Une telle fonction est dite continue sur $I = [a; b]$ si elle est continue sur l'**intervalle ouvert** $]a; b[$ et si elle est continue à droite en $a$ et à gauche en $b$.

**Exemple 3.26** *Considérons la fonction $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$. Son domaine de définition est l'intervalle fermé $[-1; 1]$. Si $a$ est un nombre quelconque de l'intervalle ouvert $]-1; 1[$ alors $\lim_{x \to a} \sqrt{1 - x^2}$ existe et vaut $\sqrt{1 - a^2}$.*
*En outre, $\lim_{x \to -1^+} \sqrt{1 - x^2} = 0$ et $\lim_{x \to 1^-} \sqrt{1 - x^2} = 0$. Ainsi, par définition, $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$ est continue sur l'intervalle $[-1; 1]$.*

## 3.8 Types de discontinuité

Selon qu'une ou plusieurs des trois conditions de continuité ne sont pas respectées, il en résulte différents types de discontinuité. On observe trois types de discontinuité.

1. **Discontinuité infinie : asymptote verticale**
   Une fonction $f(x)$ a une discontinuité infinie en $x = a$ si

$$\lim_{x \to a} f(x) = \pm\infty.$$

   On parle de discontinuité infinie à gauche si

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = \pm\infty.$$

   et de discontinuité infinie à droite si

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = \pm\infty.$$

**Exemple 3.27** *La fonction* $f(x) = \dfrac{1}{(x-2)^2}$ *n'est pas définie au point* $x = 2$. *Cette fonction a une* ***discontinuité infinie*** *en* $x = 2$ *car* $\lim_{x \to 2} \dfrac{1}{(x-2)^2} = \infty$ *(Figure 3.6).*

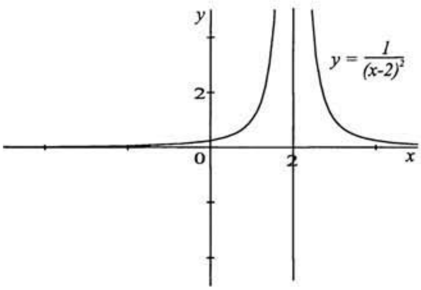



Figure 3.6: Discontinuité infinie en $x = 2$

1. **Discontinuité finie : saut**
   Une fonction $f(x)$ a une discontinuité finie en $x - a$ si

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = c_1 \text{ et } \lim_{x \to a^+} f(x) = c_2, \text{ où } c_1 \neq c_2.$$

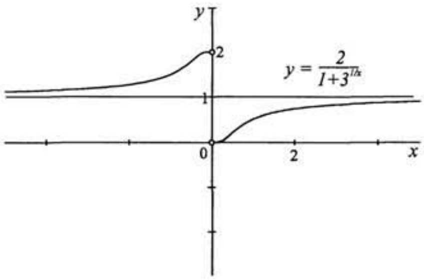



Figure 3.7: Discontinuité finie en $x = 0$

**Exemple 3.28** *La fonction* $f(x) = \dfrac{2}{1+3^{1/x}}$ *n'est pas définie au point* $x = 0$. *Cette fonction a une* ***discontinuité finie*** *en* $x = 0$, *car* $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{2}{1+3^{1/x}} = 2$ *et* $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{2}{1+3^{1/x}} = 0$ *(Figure 3.7).*

1. **Discontinuité réparable : trou**
   Une fonction $f(x)$ a une discontinuité réparable en $x = a$ si $f(a)$ n'est pas défini, mais $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ existe. On parle de discontinuité réparable respectivement à gauche et à droite si $f(a)$ n'est pas défini, mais $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$ existent respectivement.

**Exemple 3.29** *La fonction* $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x-1}$ *n'est pas définie au point* $x = 1$. *Cette fonction a une* ***discontinuité réparable*** *en* $x = 1$ *car*
$\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2-1}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1}(x+1) = 2$ *(Figure 3.8).*
*Cependant, si l'on définit la fonction*

$$\bar{f}(x) = \begin{cases} f(x) & si\ x \neq 1 \\ 2 & si\ x = 1 \end{cases}$$

*alors* $\bar{f}(x)$ *est continue au point* $x = 1$. *En effet,* $\bar{f}(x)$ *est définie en* $x = 1$ *et* $\lim\limits_{x\to 1} \bar{f}(x) = \bar{f}(1) = 2$. *On dit que* $\bar{f}$ *est le* ***prolongement continu*** *de* $f$.

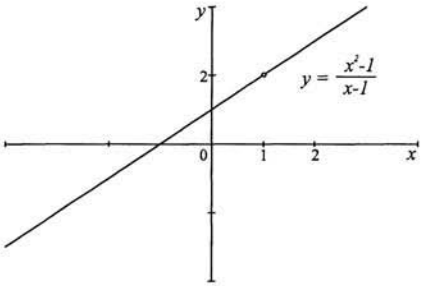



Figure 3.8: Discontinuité réparable en $x = 1$

**Exemple 3.30** *La fonction $f(x) = e^{1/x}$ n'est pas définie au point $x = 0$. Cette fonction a une **discontinuité réparable à gauche** et une **discontinuité infinie à droite** en $x = 0$. En effet, $\lim\limits_{x \to 0^-} e^{1/x} = 0$ et $\lim\limits_{x \to 0^+} e^{1/x} = \infty$ (Figure 3.9).*

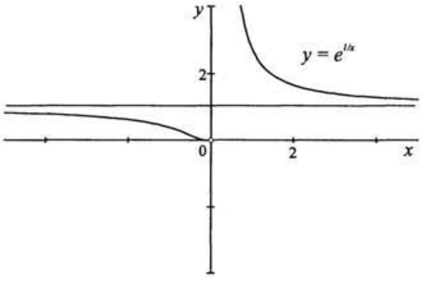



Figure 3.9: Discontinuité réparable à gauche et discontinuité infinie à droite en $x = 0$

## 3.9 Propriétés des fonctions continues

Les propriétés des limites nous conduisent directement aux propriétés des fonctions continues, à savoir :

1. la somme ou la différence de deux fonctions continues est continue ;

2. le produit de deux fonctions continues est continu ;
3. le quotient de deux fonctions continues est continu, si le dénominateur ne s'annule pas ;
4. la composition de deux fonctions continues est continue, pour autant qu'elle soit définie.

Ces propriétés étant valables aussi bien pour la continuité en un point que pour la continuité sur un intervalle.

Dans ce qui suit, nous allons exposer certaines propriétés des fonctions continues sur un intervalle fermé $[a; b]$. Ces propriétés seront énoncées sous forme de théorèmes sans démonstration.

**Théorème 3.1** *Si $f(x)$ est une fonction continue sur un intervalle fermé $[a; b]$, alors $f(x)$ a une valeur maximale $M$ et une valeur minimale $m$ sur $[a; b]$, et $f(x)$ prend sur $[a; b]$ toute valeur comprise entre son minimum $m$ et son maximum $M$.*

**Théorème 3.2** ***(Théorème de Bolzano)*** *Si $f(x)$ est une fonction continue sur un intervalle fermé $[a; b]$ et si $f(a)$ et $f(b)$ sont de signes opposés, alors il existe un point $x_0$ de l'intervalle tel que $f(x_0) = 0$.*

**Remarque** Le théorème 3.1 est important car il nous assure l'existence des extrema d'une fonction continue sur un intervalle fermé. L'hypothèse que l'intervalle est fermé est essentielle. Soit, en effet, la fonction $\frac{1}{x}$ qui n'a pas de maximum sur l'intervalle semi-ouvert $]0; 1]$, où elle est pourtant continue.

Le théorème 3.2 nous permet de constater notamment que tout polynôme $p(x)$ de degré impair possède au moins une racine réelle. En effet, pour $c$ suffisamment grand, $p(c)$ et $p(-c)$ sont de signes opposés.

## 3.10 Définition de la première dérivée

Nous allons étudier la variation d'une fonction $y = f(x)$ lorsque la variable indépendante $x$ varie.

Si la valeur d'une variable $x$ passe de $x_0$ à $x_1$, on dit qu'il y a **accroissement** de la variable $x$ et l'on note cet accroissement par $\Delta x$. $\Delta x$ peut

être positif ou négatif suivant que $x$ croît ou décroît. De même, on note $\Delta y$ l'accroissement de $y$, $\Delta f(x)$ l'accroissement de $f(x)$, etc.

Si, dans une fonction $y = f(x)$, la variable indépendante $x$ varie de $\Delta x$, $y$ varie de $\Delta y$, où $\Delta y$ dépend de la valeur de $y$ qui correspond à la valeur initiale de $x$ ainsi que de $\Delta x$.

**Exemple 3.31** *Soit* $y = f(x) = x^3$. *En prenant comme valeur initiale* $x_0 = 2$, *on obtient la valeur correspondante* $y_0 = x_0^3 = 8$ *comme valeur initiale de* $y$. *Si nous choisissons un* $\Delta x$ *égal à 1, la valeur de* $x$ *s'accroît de* $x_0 = 2$ *à* $x_1 = 3$. *Avec* $x_1 = 3, y_1 = x_1^3 = 27$. *L'accroissement de* $y$ *est donc* $\Delta y = y_1 - y_0 = 27 - 8 = 19$. *Si nous choisissons un* $\Delta x = -1$, $x$ *décroît de* $x_0 = 2$ *à* $x_1 = 1$. *Pour* $x_1 = 1, y_1 = x_1^3 = 1$. *L'accroissement de* $y$ *est donc* $\Delta y = y_1 - y_0 = 1 - 8 = -7$.
*Dans les deux cas,* $\Delta x$ *et* $\Delta y$ *sont de même signe. Toutefois il se peut que lorsque* $\Delta x$ *est positif,* $\Delta y$ *soit négatif, ou inversement.*

Nous venons de voir que

$$y + \Delta y = (x + \Delta x)^3$$

que nous pouvons généraliser comme suit :

$$y + \Delta y = f(x + \Delta x).$$

En soustrayant $y = f(x)$ membre à membre dans l'équation ci-dessus, on obtient :

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x).$$

Si l'on divise de chaque côté par $\Delta x$, on trouve :

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

La limite de ce rapport quand $\Delta x$ tend vers zéro est par définition la **première dérivée** de la fonction $y = f(x)$. On la note $dy/dx$. Donc :

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

est la première dérivée de $y$ par rapport à $x$. On peut aussi la noter $f'(x)$ ou simplement $y'$.

**Définition 3.9** *Si la fonction $y = f(x)$ a une dérivée au point $x = x_0$, c'est-à-dire si la limite $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$ existe, on dit que la fonction est* ***dérivable*** *au point $x = x_0$ et on la note $f'(x_0)$.*
*On dit que $f$ est* ***dérivable à droite*** *au point $x_0$*

$$\text{si} \quad \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \quad \text{existe}$$

*et $f$ est* ***dérivable à gauche*** *au point $x_0$*

$$\text{si} \quad \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \quad \text{existe.}$$

D'après la définition, une fonction est dérivable en $x = x_0$ si et seulement si les limites à droite et à gauche existent et sont égales.
**Remarque Si une fonction $y = f(x)$ est dérivable au point $x = x_0$, alors elle est aussi continue en ce point.** La réciproque est fausse : si une fonction est continue en $x = x_0$, elle n'est pas forcément dérivable en ce point (exercices).

**Définition 3.10** *On dit d'une fonction qu'elle est* ***dérivable sur un intervalle*** *$I \in \mathbb{R}$, si elle est dérivable en chaque point de cet intervalle. Si $I$ est un intervalle fermé $[a;b]$, alors on dit que $f$ est dérivable sur $[a;b]$, si elle est dérivable sur $]a;b[$ et si elle est dérivable à droite en $a$ et à gauche en $b$.*

## 3.11 Règle générale de dérivation

D'après la définition de la dérivée, on voit que dans le processus de dérivation d'une fonction $y = f(x)$, il faut effectuer les opérations suivantes :

| | |
|---|---|
| **1<sup></sup>re opération** | Remplacer $x$ par $(x + \Delta x)$ dans $y = f(x)$ pour obtenir $y + \Delta y$. |
| **2e opération** | Retrancher $y = f(x)$ pour obtenir $\Delta y$. |
| **3e opération** | Diviser à gauche et à droite par $\Delta x$. |
| **4e opération** | Calculer la limite du quotient $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ quand $\Delta x$ tend vers zéro. Cette limite est la dérivée cherchée. |

**Exemple 3.32** *Calculons la première dérivée de $y = 4x^2 + 3$ à l'aide de ces quatre opérations :*

***1re opération*** $y + \Delta y = \quad 4(x+\Delta x)^2 + 3 = 4x^2 + 8x\Delta x + 4(\Delta x)^2 + 3.$

***2e opération*** $\Delta y = \quad 4x^2 + 8x\Delta x + 4(\Delta x)^2 + 3 - (4x^2+3)$
$8x\Delta x + 4(\Delta x)^2.$

***3e opération*** $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \quad \dfrac{8x\Delta x + 4(\Delta x)^2}{\Delta x}.$

***4e opération*** $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{8x\Delta x + 4(\Delta x)^2}{\Delta x}$
$= \lim\limits_{\Delta x\to 0}(8x + 4\Delta x) = 8x.$

*La première dérivée de $y = 4x^2 + 3$ vaut donc $8x$, c'est-à-dire $f'(x) = 8x$.*

## 3.12 Interprétation géométrique de la première dérivée

On définit la **pente** d'une droite comme étant égale à la tangente de l'angle qu'elle forme avec l'axe des $x$ ou d'une manière équivalente comme étant égale au rapport $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ (Figure 3.10).

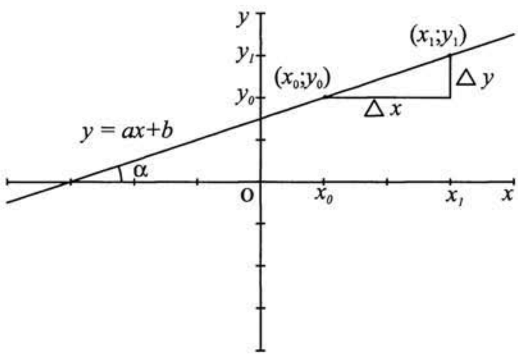



Figure 3.10: Pente d'une droite

Nous avons donc : pente $= \tan\alpha = \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$.

La pente d'une droite donnée est une constante. Cela signifie que, où que l'on soit sur la droite, le rapport $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ est toujours le même. Ce n'est pas le

cas pour les autres courbes. Nous allons maintenant généraliser la notion de pente pour toutes les fonctions.

Prenons deux points quelconques sur la courbe $y = f(x)$ :

$$M = (x_0; y_0) \quad \text{et} \quad N = (x_1; y_1).$$

La droite qui relie $M$ à $N$, appelée une sécante, a une pente égale à

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}.$$

On va maintenant faire bouger le point $N$ le long de la courbe en direction de $M$. Par cette opération, la pente de la sécante (qui relie $M$ à $N$) va changer. Or, plus $N$ se rapproche de $M$, moins le changement de la pente de la sécante est grand. En fait, la pente tend vers une limite finie. Cette limite est appelée la pente de la tangente à la courbe au point $M = (x_0, y_0)$ ou plus simplement la **dérivée au point** $M$ (Figure 3.11).

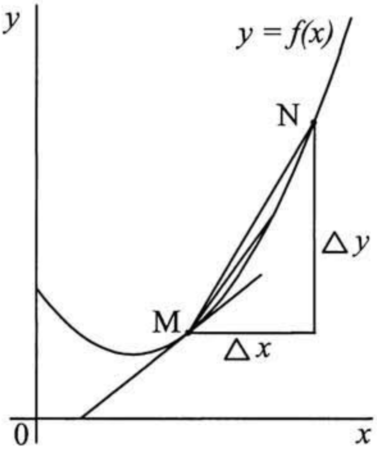



Figure 3.11: dérivée au point M

Nous avons donc : pente de $f(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$. Or, comme nous l'avons déjà vu, cette limite est égale à la première dérivée de $f(x)$. D'où le résultat suivant :

La valeur de la dérivée en un point quelconque d'une courbe est égale à la pente de la tangente en ce point. En clair :

$$\begin{aligned} f'(x_0) &= \text{pente de } f(x) \text{ au point } (x_0, y_0) \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}. \end{aligned}$$

**Exemple 3.33** *Calculons les pentes de la courbe $y = -x^2$ aux points $x = 0$ et $x = -1/2$. Par la définition de la dérivée, nous avons :*

***1**re **opération*** $y + \Delta y = -(x + \Delta x)^2 = -x^2 - 2x\Delta x - (\Delta x)^2.$

***2**e **opération*** $\Delta y = -x^2 - 2x\Delta x - (\Delta x)^2 + x^2 = -2x\Delta x - (\Delta x)^2.$

***3**e **opération*** $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = -2x - \Delta x.$

***4**e **opération*** $\lim_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (-2x - \Delta x) = -2x.$

*$f'(x) = -2x$ représente la dérivée $f(x) = -x^2$ en un point quelconque. Pour trouver la pente au point $x_0 = 0$, on remplace $x$ par $x_0$ dans $-2x$, ce qui donne $f'(x_0) = 0$. La tangente au point $x_0 = 0$ a donc une pente nulle, c'est-à-dire que c'est une droite horizontale. Pour trouver la pente au point $x = -1/2$, on procède de la même manière et l'on obtient $f'(x_0) = -2\left(-\dfrac{1}{2}\right) = 1$. La pente est donc égale à 1, c'est-à-dire qu'elle fait un angle de $45^o$ avec l'axe des $x$ (Figure 3.12).*

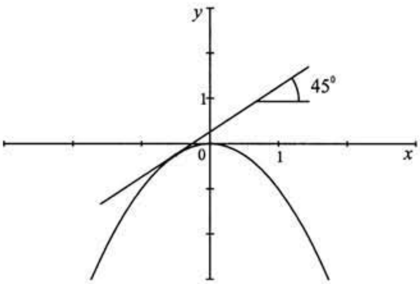



Figure 3.12: dérivée de $y = -x^2$ en $x = -\frac{1}{2}$ et $x = 0$

## 3.13 Dérivées des fonctions algébriques

La recherche de la dérivée en utilisant sa définition est un travail long et pénible. C'est pourquoi il est préférable de dériver une fonction à l'aide des règles spéciales déduites de la règle générale pour dériver certaines formes classiques des fonctions algébriques.

- **Dérivée d'une somme**

  Soit $f(x) = u(x) + v(x)$, où $u(x)$ et $v(x)$ sont des fonctions dérivables de $x$. Dans ce cas,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x+\Delta x) + v(x+\Delta x) - [u(x) + v(x)]}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x+\Delta x) - u(x)}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{v(x+\Delta x) - v(x)}{\Delta x} \\ &= u'(x) + v'(x). \end{aligned}$$

  Ainsi : $(u+v)' = u' + v'$, c'est-à-dire : $\frac{d}{dx}(u+v) = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx}$.

  Cette règle se généralise à un nombre fini de termes : **La dérivée d'une somme d'un nombre fini de fonctions est égale à la somme des dérivées de ces fonctions.** Il en est de même pour la différence d'un nombre fini de fonctions.

- **Dérivée d'un produit**

  Soit $f(x) = u(x) \cdot v(x)$, où $u(x)$ et $v(x)$ sont des fonctions dérivables de $x$. Dans ce cas,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x+\Delta x) \cdot v(x+\Delta x) - u(x) \cdot v(x)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{[u(x+\Delta x) - u(x)]v(x+\Delta x) + [v(x+\Delta x) - v(x)]u(x)}{\Delta x} \\ &= u'(x) \cdot v(x) + v'(x) \cdot u(x). \end{aligned}$$

  Ainsi : $(u \cdot v)' = u \cdot v' + u' \cdot v$, c'est-à-dire : $\frac{d}{dx}(u \cdot v) = \frac{dv}{dx} \cdot u + \frac{du}{dx} \cdot v$.

On notera que pour trois facteurs, on a :

$$(u \cdot v \cdot w)' = u' \cdot v \cdot w + u \cdot v' \cdot w + u \cdot v \cdot w'.$$

Cette règle peut aussi se généraliser au cas du produit d'un nombre fini de fonctions :

$$(u_1 \cdot u_2 \cdot \ldots \cdot u_n)' = u_1' \cdot u_2 \cdot \ldots \cdot u_n + u_1 \cdot u_2' \cdot u_3 \cdot \ldots \cdot u_n + \cdots + u_1 \cdot u_2 \cdot \ldots \cdot u_n'.$$

- **Dérivée d'un quotient**

  Soit $y = f(x) = \dfrac{u(x)}{v(x)}$, où $u(x)$ et $v(x)$ sont dérivables et $v(x) \neq 0$. La dérivée de cette fonction se déduit de la dérivée du produit. On a : $y = \dfrac{u}{v} \Rightarrow v \cdot y = u$. Par dérivation : $v \cdot y' + v' \cdot y = u'$. Donc :

$$y' = \frac{u' - v'y}{v} \Rightarrow y' = \frac{1}{v} \cdot (u' - v' \cdot \frac{u}{v}) \Rightarrow y' = \frac{1}{v^2} \cdot (vu' - uv').$$

  Ainsi : $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{vu' + uv'}{v^2}$, c'est-à-dire : $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{u}{v}\right) = \dfrac{1}{v^2}\left(v\dfrac{du}{dx} - u\dfrac{dv}{dx}\right)$.

- **Dérivée d'une composition de fonctions**

  Si $y = f(u)$ et $u = g(x)$, c'est-à-dire si $y = f(g(x))$, alors $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \dfrac{\Delta u}{\Delta x}$ ,d'où : $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{dy}{du} \cdot \dfrac{du}{dx}$ ; ainsi :

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}, \text{ c'est-à dire } y' = f'(g(x)) \cdot g'(x).$$

**Exemple 3.34** *La fonction $y = (5x^3 + 2)^4$ est de la forme $y = f(u) = u^4$, avec $u = g(x) = 5x^3 + 2$. D'après la règle précédente :*

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = 4 \cdot u^3 \cdot 15x^2 = 4 \cdot (5x^3 + 2)^3 \cdot 15x^2 = 60x^2 \cdot (5x^3 + 2)^3.$$

- **Dérivée logarithmique**

  Il est parfois plus avantageux de dériver le logarithme naturel de la fonction que la fonction elle-même. Soit $y = f(x)$ la fonction donnée ; dans ce cas, on peut montrer que : $\frac{d}{dx} \ln f(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}$, d'où :

$$f'(x) = f(x) \cdot \frac{d}{dx} \ln f(x).$$

  On notera que : $\frac{d}{dx}(\ln x) = \frac{1}{x}$, résultat obtenu lui aussi grâce à la règle précédente.

**Exemple 3.35** *Soit la fonction* $y = f(x) = x^x$. *Pour* $x > 0$, *on a* $\ln(x^x) = x \cdot \ln x$.
*D'après la règle ci-dessus, on a :* $f'(x) = x^x \cdot \frac{d}{dx}(x \cdot \ln x)$.
*La règle du produit donne :*

$$\frac{d}{dx}(x \cdot \ln x) = 1 \cdot \ln x + \frac{x}{x} = \ln x + 1 (x > 0).$$

*Ainsi,* $f'(x) = x^x \cdot (\ln x + 1)$.

Le tableau suivant fournit une liste des dérivées des fonctions les plus courantes, que l'on pourra démontrer à titre d'exercice.

| $f(x)$ | $f'(x)$ |
|---|---|
| $c$ | $0$ |
| $x^\alpha, \alpha \in R$ | $\alpha x^{\alpha-1}$ |
| $a^x, a > 0, a \neq 1$ | $a^x \cdot \ln a$ |
| $\log_a x, a > 0, a \neq 1$ | $\frac{1}{x} \cdot \log_a e$ |
| $\cos x$ | $-\sin x$ |
| $\sin x$ | $\cos x$ |
| $\cosh x$ | $\sinh x$ |
| $\sinh x$ | $\cosh x$ |

le processus de dérivation. La dérivée de la première dérivée est la seconde dérivée ; sa dérivée est la troisième dérivée, etc., jusqu'à la $n^e$ dérivée. Là aussi, il existe plusieurs notations possibles pour indiquer les dérivées successives. Ainsi,

$$\begin{array}{llll} f'(x) & = y' & = dy/dx & : \text{ première dérivée,} \\ f''(x) & = y'' & = d^2y/dx^2 & : \text{ deuxième dérivée,} \\ \ldots & & & \\ f^{(n)}(x) & = y^{(n)} & = d^n y/dx^n & : n^e \text{ dérivée.} \end{array}$$

**Exemple 3.36** *Si* $y = 3x^4 - x^2$, *alors*

$$\begin{aligned} y' &= 12x^3 - 2x, \\ y'' &= 36x^2 - 2, \\ y^{(3)} &= 72x, \\ y^{(4)} &= 72, \\ y^{(5)} &= 0, \\ &\vdots \\ y^{(n)} &= 0, \forall n \geq 5. \end{aligned}$$

## 3.14 Les différentielles

Dans les paragraphes précédents, $dy/dx$ n'est pas considéré comme un quotient, mais comme le symbole représentant la limite de $\Delta y/\Delta x$ quand $\Delta x$ tend vers zéro. Il existe toutefois des problèmes où $dy$ et $dx$ prennent des significations séparées. Dans ce cas, on appelle $dy$ la différentielle de $y$ et $dx$ la différentielle de $x$. La notion de différentielle est utilisée en calcul intégral (chapitre 5) et dans l'approximation des valeurs d'une fonction. La définition de la différentielle de $y$, notée $dy$ ou $df(x)$ est la suivante :

si $f'(x)$ est la première dérivée de $f(x)$ et $\Delta x$ un accroissement arbitraire de $x$,

$$dy = df(x) = f'(x) \cdot \Delta x.$$

Notons que si $f(x) = x$, nous avons $f'(x) = 1$ et, de ce fait :

$$df(x) = dx = \Delta x.$$

Notons que si $f(x) = x$, nous avons $f'(x) = 1$ et, de ce fait :

$$df(x) = dx = \Delta x.$$

Par suite, si $y = f(x)$, c'est-à-dire si $x$ est la variable indépendante, on peut généralement écrire :

$$dy = df(x) = f'(x)dx.$$

Nous allons maintenant considérer le problème graphiquement. Soit $y = f(x)$ la courbe de la figure 3.13 et $f'(x)$ la dérivée de $f(x)$ au point $P$.

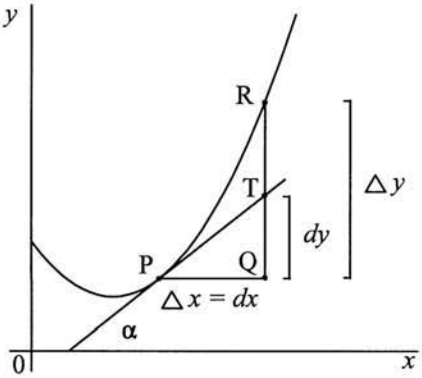



Figure 3.13: Différentielle $dy$

Si l'on prend $dx = PQ$, on obtient alors :

$$dy = f'(x) \cdot PQ$$

et comme $f'(x) = \tan\alpha$, on a

$$dy = \tan\alpha \cdot PQ.$$

Par définition , $\tan\alpha = \dfrac{QT}{PQ}$, ce qui donne

$$dy = \frac{QT}{PQ} \cdot PQ = QT.$$

Par conséquent, $dy$ est l'accroissement (égal à $QT$) de l'ordonnée de la tangente correspondant à $dx$.

Notons que la différentielle $dy$ et l'accroissement $\Delta y$ correspondant au même $dx$ ne sont en général pas égaux. Sur la figure 3.13, $dy = QT$ tandis que $\Delta y = QR$. Nous allons maintenant observer l'application des différentielles dans l'approximation des valeurs d'une fonction. Nous avons noté que $dy$ était en général différent de $\Delta y$. Toutefois quand $\Delta x = dx$ devient très petit, $dy$ est presque égal à $\Delta y$. Nous pouvons donc utiliser la différentielle $dy$ pour calculer la valeur d'une fonction en un point $x + \Delta x$, avec $\Delta x$ petit. L'erreur que nous commettons est d'autant plus petite que $\Delta x$ est petit.

**Exemple 3.37** *Soit la fonction* $y = 4x^4 - x^3 + 8x - 6$. *On va calculer la valeur de* $y$ *pour* $x = 2.003$. *Nous constatons que le calcul avec* $x = 2.003$ *n'est pas chose aisée. En revanche, nous pouvons facilement trouver* $y$ *avec* $x = 2$.

$$\begin{aligned} y &= 4 \cdot 2^4 - 2^3 + 8 \cdot 2 - 6 \\ &= 64 - 8 + 16 - 6 \\ &= 66. \end{aligned}$$

*Nous posons maintenant : 2.003 est égal à* $2 + 0.003$, *c'est-à-dire* $x + \Delta x$ *avec* $x = 2$ *et* $\Delta x = 0.003$. *Nous connaissons la définition de* $dy$ *:*

$$dy = f'(x)\Delta x$$

*donc il faut que nous cherchions la dérivée de* $f(x)$ *:*

$$f'(x) = 16x^3 - 3x^2 + 8.$$

*Nous remplaçons* $x$ *par* 2 *dans* $f'(x)$, *ce qui donne :*

$$f'(2) = 128 - 12 + 8 = 124.$$

*Nous avons donc, en remplaçant* $\Delta x$ *par 0.003 :*

$$dy = 124 \cdot 0.003 = 0.372.$$

*Puisque* $y = 66$ *quand* $x$ *vaut* 2 *et que* $y$ *varie de* 0.372 *quand* $x$ *varie de* 0.003, *nous avons :*

$$y + dy = 66 + 0.372 = 66.372.$$

*Par conséquent, y vaut approximativement* 66.372 *quand* $x$ *vaut* 2.003. *Nous pouvons maintenant nous intéresser à l'erreur commise dans cette approximation. Pour cela, nous calculons* $\Delta y - dy$.

$$\begin{aligned}
\Delta y &= f(x+\Delta x) - f(x) \\
&= 4(x+\Delta x)^4 - (x+\Delta x)^3 + 8(x+\Delta x) - 6 \\
&\quad -(4x^4 - x^3 + 8x - 6) \\
&= 4x^4 + 16x^3\Delta x + 24x^2(\Delta x)^2 + 16x(\Delta x)^3 \\
&\quad +4(\Delta x)^4 - x^3 - 3x^2\Delta x - 3x(\Delta x)^2 - (\Delta x)^3 + 8x \\
&\quad +8\Delta x - 6 - 4x^4 + x^3 - 8x + 6 \\
&= 16x^3\Delta x + 24x^2(\Delta x)^2 + 16x(\Delta x)^3 \\
&\quad +4(\Delta x)^4 - 3x^2\Delta x - 3x(\Delta x)^2 \\
&\quad -(\Delta x)^3 + 8\Delta x
\end{aligned}$$

$dy$, *quant à lui, est égal à :*

$$\begin{aligned}
dy &= f'(x)\Delta x \\
&= (16x^3 - 3x^2 + 8)\Delta x \\
&= 16x^3\Delta x - 3x^2\Delta x + 8\Delta x.
\end{aligned}$$

*Alors*

$$\Delta y - dy = 24x^2(\Delta x)^2 + 16x(\Delta x)^3 + 4(\Delta x)^4 - 3x(\Delta x)^2 - (\Delta x)^3$$

*qui vaut avec* $x = 2$ *et* $\Delta x = 0.003$ *:*

$$\begin{aligned}
\Delta y - dy &= (96-6)\cdot(0.003)^2 + (32-1)\cdot(0.003)^3 + 4\cdot(0.003)^4 \\
&= 0.000810837324.
\end{aligned}$$

*Par conséquent, l'approximation* $y = 66.372$ *comporte une erreur de* 0.000810837324, *ce qui signifie que la vraie valeur de* $y$ *est égale à* 66.372810837324.

# Exercices

1. Écrire les cinq premiers termes des suites :

   (a) $u_n = 1 - \frac{1}{3n}$.

   (b) $u_n = \frac{(-1)^{n+1}}{4n-1}$.

   (c) $u_n = \frac{3n}{2+n^2}$.

   (d) $u_n = 2((-1)^n + 2)$.

2. Écrire les termes généraux de chacune des suites :

   (a) $\frac{3}{1}, \frac{4}{4}, \frac{5}{9}, \frac{6}{16}, \frac{7}{25}, \ldots$.

   (b) $-\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots$.

   (c) $\frac{1}{2}, \frac{8}{4}, \frac{27}{6}, \frac{64}{8}, \ldots$.

   (d) $\frac{1}{2}, -\frac{5}{8}, \frac{9}{18}, -\frac{13}{32}, \frac{17}{50}, \ldots$.

3. Déterminer si les suites ci-dessous sont bornées ou non-bornées, croissantes ou décroissantes, convergentes ou divergentes. Si elles sont convergentes, trouver leur limite :

   (a) $u_n = \frac{(-1)^n(n+2)}{n^2}$.

   (b) $-\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{5}, -\frac{1}{6}, \ldots$.

   (c) $-\frac{1}{3}, -1, -\frac{9}{5}, -\frac{8}{3}, -\frac{25}{7}, \ldots$.

   (d) $\frac{1}{2}, 1, \frac{9}{6}, 2, \frac{5}{2}, \ldots$.

4. Déterminer quel est le cinquantième terme des suites suivantes :

   (a) $5, 7, 9, 11, 13, \ldots$.

(b) $-4, -1, 4, 11, 20, 31, 44, ....$

(c) $\frac{1}{3}, -\frac{1}{2}, \frac{3}{5}, -\frac{2}{3}, \frac{5}{7}, ....$

(d) $1, 1, 8, 1, 1, 8, 1, 1, 8, 1, ....$

5. Pour les suites données par les termes généraux suivants, dire si elles sont :

   - monotones ou non monotones
   - croissantes, décroissantes, alternées ou autre
   - bornées ou non bornées
   - convergentes ou divergentes

   (a) $u_n = 2$.

   (b) $u_n = n(-1)^n$.

   (c) $u_n = -\frac{2}{n^3}$.

   (d) $u_n = n (\mathrm{mod}\, 6)$.

   (e) $u_n = n (\mathrm{mod}\, 6) - n$.

   (f) $u_n = 10^n$.

   (g) $u_n = \sin((2n-1)\frac{\pi}{2})$.

   (h) $u_n = \begin{cases} \frac{n^3}{5n+1} \text{ si } n \neq 6 \\ 1000 \text{ si } n = 6 \end{cases}$.

6. Deviner les limites $l$ des deux suites convergentes données par les termes généraux suivants :

   (a) $u_n = 3 - \frac{2}{n}$.

   (b) $u_n = \frac{n+1}{n+4}$.

   Dans chaque cas, déterminer les $N(\varepsilon)$ correspondants, telles que $|u_n - l| < \varepsilon$, pour tout $n \geq N(\varepsilon)$ avec :

   - $\varepsilon_1 = 0.1$
   - $\varepsilon_2 = 0.01$

- $\varepsilon_3 = 0.001$

7. Trouver la limite des fonctions suivantes :

   (a) $\lim_{x \to \infty} \frac{2x+5}{x^2-3}$.

   (b) $\lim_{x \to \infty} \frac{x^3 - 4x^2 + 8}{x^2+6}$.

   (c) $\lim_{x \to \infty} \frac{ax^2 + bx + c}{kx^2 + lx + m}$.

8. Indiquer si les fonctions suivantes sont continues ou non. Dans le cas où elles ne sont pas continues, indiquer et expliquer de quel type de discontinuité il s'agit :

   (a) $f(x) = \frac{4 - x^2}{3 - (x^2+5)^{1/2}}$ au point $x = 2$.

   (b) $f(x) = \frac{1 + 2^{1/x}}{4 + 3^{1/x}}$ au point $x = 0$.

   (c) $f(x) = \frac{2^x - 2^{-x}}{2^x + 2^{-x}}$ au point $x = 0$.

   (d) $f(x) = \frac{x-1}{x^2-1}$ au point $x = 2$.

9. À l'aide de la **définition de la dérivée**, calculer les dérivées des fonctions suivantes :

   (a) $f(x) = (2x+1)^{1/2}$.

   (b) $f(x) = x^{1/3}$.

   (c) $f(x) = -\frac{1}{x}$.

10. Montrer que $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ ;
    Montrer ensuite que la dérivée de $f(x) = \sin x$ est $f'(x) = \cos x$.

11. Trouver l'expression générale de la dérivée d'ordre $n$ des fonctions suivantes :

    (a) $f(x) = e^{cx}$.

(b) $f(x) = \cos x$.

(c) $f(x) = \dfrac{1}{x}$.

(d) $f(x) = \ln x$.

12. Trouver la dérivée des fonctions suivantes :

    (a) $y = \sin\left((1-4x)^{1/2}\right)$.

    (b) $y = \ln\left((3x+4)^{1/3}\right)$.

    (c) $y = e^{2x}$.

    (d) $y = \ln\left(\dfrac{x^3-2}{x^2+1}\right)$.

    (e) $y = \sinh x$.

    (f) $y = \cot x$.

13. En utilisant les différentielles, trouver une valeur approchée pour chacun des nombres suivants :
    (a) $\sqrt{66}$ (b) $\log_{10} 101$ (c) $\dfrac{1}{31}$.

# Chapitre 4

# Applications des dérivées

## 4.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous allons donner deux sortes d'applications des dérivées. La première application concerne l'étude d'une fonction quelconque. À l'aide des dérivées, on peut étudier la croissance d'une fonction, ses points minimum et maximum, ses points d'inflexion, sa concavité. Nous donnons également une procédure générale pour trouver la limite des formes indéterminées. Cette procédure est fondée sur la règle de l'Hospital. Ceci est résumé dans un paragraphe intitulé étude d'une fonction. La deuxième forme d'applications concerne l'utilisation des dérivées en économie, comme par exemple le coût et revenu marginal, ainsi qu'un profit en régime de monopole.

## 4.2 Croissance et décroissance des fonctions

La première dérivée d'une fonction nous permet de déterminer si cette fonction est croissante ou décroissante.

**Définition 4.1** *On dit qu'une fonction $f(x)$ est* ***croissante*** *au point $x = x_0$ si pour $h > 0$ (suffisamment petit), on a :*

$$f(x_0 - h) < f(x_0) < f(x_0 + h).$$

*On dit qu'une fonction est **décroissante** au point $x = x_0$, si pour $h > 0$, on a :*

$$f(x_0 - h) > f(x_0) > f(x_0 + h).$$

*On peut montrer que si $f'(x_0) > 0$, alors $f(x)$ est une fonction **croissante** au point $x = x_0$. Comme $f'(x_0)$ est la pente de la tangente au point $x = x_0$, nous pouvons illustrer ce résultat sur la figure 4.1(a).*
*Si $f'(x_0) < 0$, alors $f(x)$ est une fonction **décroissante** au point $x = x_0$ (Figure 4.1(b)).*

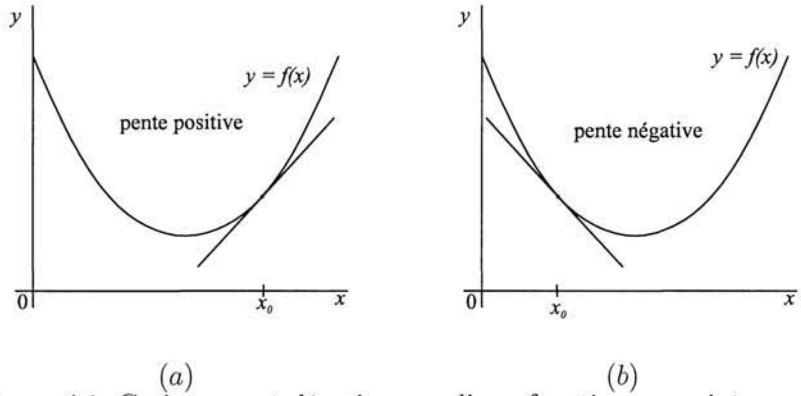



Figure 4.1: Croissance et décroissance d'une fonction au point $x = x_0$

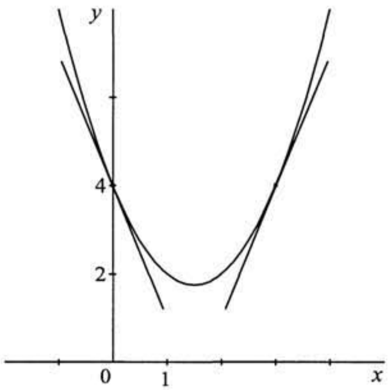



Figure 4.2: Croissance et décroissance de $y = x^2 - 3x + 4$

**Exemple 4.1** *Soit* $f(x) = x^2 - 3x + 4$ *; on a* $f'(x) = 2x - 3$*. Comme* $f'(x) < 0$ *pour* $x < \frac{3}{2}$ *et* $f'(x) > 0$ *pour* $x > \frac{3}{2}$*,* $f(x)$ *est une fonction décroissante pour* $x < \frac{3}{2}$ *et croissante pour* $x > \frac{3}{2}$ *(Figure 4.2).*

## 4.3 Minima et maxima des fonctions

La première dérivée peut aussi être utilisée pour déterminer les minima et maxima d'une fonction.

**Définition 4.2** *Soit une fonction* $y = f(x)$ *définie sur un intervalle contenant* $x_0$*. On dit que la fonction* $y = f(x)$ *possède un* ***minimum relatif*** *au point* $x = x_0$ *si* $f(x_0) \leq f(x)$ *pour tout* $x$ *appartenant à un certain intervalle contenant* $x_0$*. De même,* $f(x)$ *possède un* ***maximum relatif*** *au point* $x = x_0$ *si* $f(x_0) \geq f(x)$ *pour tout* $x$ *appartenant à un certain intervalle contenant* $x_0$*. On parle de* ***minimum absolu*** *si* $f(x_0) \leq f(x)$ *pour tout* $x$ *appartenant au domaine de définition de la fonction et de* ***maximum absolu*** *si* $f(x_0) \geq f(x)$ *pour tout* $x$ *appartenant au domaine de définition de la fonction. Ces différents types de minima et maxima sont illustrés dans la figure 4.3 pour* $x \in [a; b]$*.*

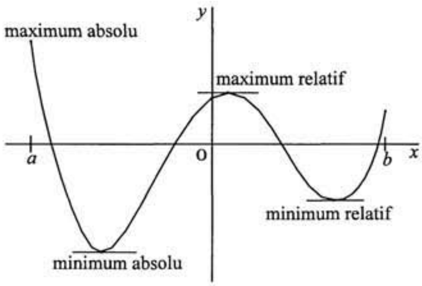



Figure 4.3: Minima et maxima d'une fonction

Considérons à présent une fonction $f(x)$, et supposons que $f(x)$ et $f'(x)$ soient continues en un point $x = x_0$. Il est géométriquement évident que si $f(x)$ a un maximum relatif en $x = x_0$, la fonction est croissante pour les valeurs juste inférieures à $x_0$ et décroissante pour les valeurs juste supérieures.

Ainsi, $f'(x)$ passe du signe positif au signe négatif quand $x$ passe en croissant par $x_0$. Comme $f'(x)$ est supposée continue, elle doit s'annuler en $x = x_0$ : $f'(x_0) = 0$.

De même, quand $f(x)$ a un minimum relatif en $x = x_0$, la fonction est décroissante pour les valeurs juste inférieures à $x_0$ et croissante pour les valeurs juste supérieures. Dans ce cas, $f'(x)$ passe du signe négatif au signe positif lorsque $x$ passe en croissant par $x_0$ ; $f'(x)$ doit, par conséquent, s'annuler en $x = x_0 : f'(x_0) = 0$.

**Remarques**

1. Un minimum ou un maximum relatif en $x = x_0$ implique : $f'(x_0) = 0$ seulement si $f(x)$ et $f'(x)$ sont continues au point $x = x_0$ (exemple 4.2).

2. $f'(x_0) = 0$ **n'implique pas** un minimum ou un maximum relatif en $x = x_0$, même si $f(x)$ et $f'(x)$ sont continues en $x = x_0$ (exemple 4.3).

**Exemple 4.2** *Si $f(x) = x^{2/3}$, alors $f'(x) = \frac{2}{3}x^{-1/3} = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$ et $f'(x)$ a une discontinuité (infinie) en $x = 0$. Ainsi, bien que la fonction ait un minimum (absolu) en $x = 0$, $f'(0) \neq 0$ (Figure 4.4).*

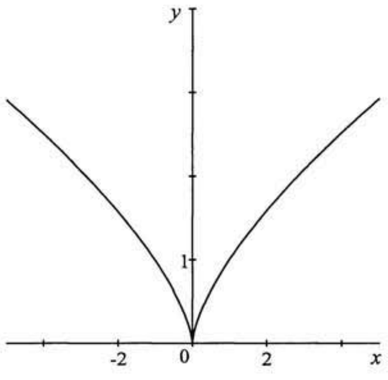



Figure 4.4: Graphe de $y = f(x) = x^{2/3}$

**Exemple 4.3** *Si $f(x) = x^5$, alors $f'(x) = 5x^4$ et $f'(x) = 0$ pour $x = 0$. Cependant, la fonction $f(x) = x^5$ n'a pas de minimum ou de maximum relatif en $x = 0$ (Figure 4.5).*

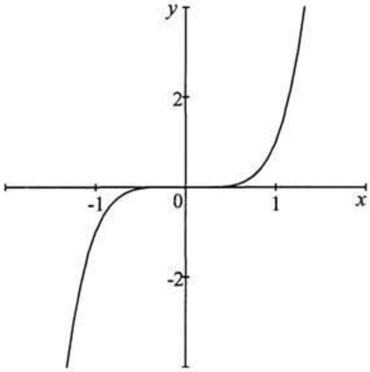



Figure 4.5: Graphe de $y = f(x) = x^5$

L'exemple 4.2 nous montre qu'il peut exister des minima et maxima pour des valeurs de $x$ en lesquelles la dérivée est discontinue. Si la fonction $f(x)$ est continue au point $x = x_0$, mais que sa première dérivée est discontinue en $x = x_0$, alors $f(x)$ peut avoir un minimum ou un maximum en $x = x_0$, même si $f'(x_0) \neq 0$. Ici encore, un changement de signe de la première dérivée lorsque $x$ passe en croissant par $x_0$ est **nécessaire** pour l'existence d'un minimum ou maximum relatif en $x = x_0$.

**Remarque** Les différents résultats concernant les extrema relatifs restent valables pour les extrema absolus non situés aux extrémités de l'intervalle de définition.

La marche à suivre pour déterminer les minima et maxima d'une fonction $y = f(x)$ à l'aide de la première dérivée est la suivante.

1. Calculer la première dérivée $f'(x)$ de la fonction.

2. (a) chercher les valeurs de $x$ pour lesquelles la dérivée s'annule, c'est-à-dire résoudre l'équation $f'(x) = 0$.

   (b) chercher les valeurs de $x$ pour lesquelles la dérivée $f'(x)$ a des discontinuités.

3. Pour chaque valeur $x_0$ trouvée sous 2a et 2b, déterminer si $f'(x)$ change de signe lorsque $x$ passe en croissant par $x_0$ :

$f'(x)$ passe du signe $-$ au signe $+$ : minimum relatif en $x = x_0$.

$f'(x)$ passe du signe $+$ au signe $-$ : maximum relatif en $x = x_0$.

$f'(x)$ passe du signe $+$ au signe $+$ : ni minimum ni maximum relatif en $x = x_0$.

$f'(x)$ passe du signe $-$ au signe $-$ : ni minimum ni maximum relatif en $x = x_0$.

4. Calculer la valeur de la fonction $f(x)$ pour chaque valeur de $x_0$ en laquelle on a soit un minimum soit un maximum relatif. On obtient ainsi les coordonnées des minima et des maxima relatifs.

**Exemple 4.4** *Soit la fonction* $y = f(x) = (1+x)^{2/3} \cdot (2-x)^{1/3}$. *Cherchons les minima et maxima de cette fonction :*

1. *Calculons la première dérivée* $f'(x)$ *de la fonction :*

$$\begin{aligned}
f'(x) &= (1+x)^{2/3} \cdot \frac{1}{3} \cdot (2-x)^{-2/3} \cdot (-1) \\
&\quad + \frac{2}{3}(1+x)^{-1/3} \cdot (2-x)^{1/3} \\
&= \frac{1}{3}(1+x)^{-1/3} \cdot (2-x)^{-2/3} \cdot [-(1+x) + 2 \cdot (2-x)] \\
&= \frac{1}{3}(1+x)^{-1/3} \cdot (2-x)^{-2/3} \cdot [3 \cdot (1-x)] \\
&= \frac{1-x}{(1+x)^{1/3} \cdot (2-x)^{2/3}}.
\end{aligned}$$

(a) $f'(x) = 0$ *lorsque* $x = 1$ ; *en effet* $f'(1) = \dfrac{0}{2^{1/3} \cdot 1^{2/3}} = 0$.

(b) $f'(x)$ *est discontinue en* $x = -1$ *et en* $x = 2$ *car le dénominateur s'annule pour chacune de ces deux valeurs. En fait, il s'agit de discontinuités infinies puisque d'une part :*

$$\lim_{x \to -1^-} f'(x) = -\infty \quad \textit{et} \quad \lim_{x \to -1^+} f'(x) = \infty$$

*et d'autre part :*

$$\lim_{x \to 2^-} f'(x) = -\infty \quad \textit{et} \quad \lim_{x \to 2^+} f'(x) = -\infty.$$

2. *Déterminons le changement de signe de $f'(x)$ aux points $x = -1$, $x = 1$ et $x = 2$*

$$\left.\begin{array}{ll} si\ x < -1, & f'(x) < 0 \\ si\ -1 < x < 1, & f'(x) > 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \textit{minimum relatif en } x = -1.$$

$$\left.\begin{array}{ll} si\ -1 < x < 1, & f'(x) > 0 \\ si\ 1 < x < 2, & f'(x) < 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \textit{maximum relatif en } x = 1.$$

$$\left.\begin{array}{ll} si\ 1 < x < 2, & f'(x) < 0 \\ si\ x > 2, & f'(x) < 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \textit{ni minimum ni maximum} \\ \textit{relatif en } x = 2 \end{array}$$

3. $f(-1) = (1-1)^{2/3} \cdot (2-(-1))^{1/3} = 0$
$f(1) = (1+1)^{2/3} \cdot (2-1)^{1/3} = 2^{2/3} \cdot 1^{1/3} = \sqrt[3]{4}$.

*Ainsi, les coordonnées du minimum relatif sont:* $(-1; 0)$ *et les coordonnées du maximum relatif sont:* $(1; \sqrt[3]{4})$ *(Figure 4.6).*

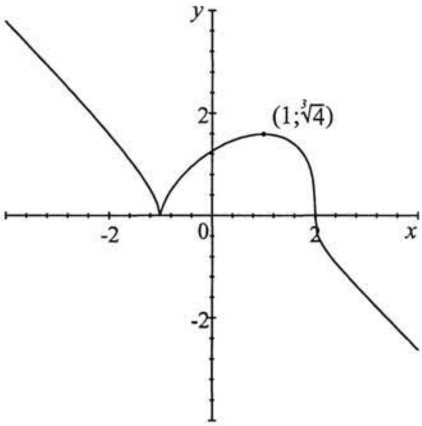



Figure 4.6: Graphe de $y = f(x) = (1+x)^{2/3} \cdot (2-x)^{1/3}$

## 4.4 Courbure des fonctions

La deuxième dérivée d'une fonction peut être utilisée pour étudier la concavité de cette fonction.

**Définition 4.3** *Une fonction est dite* ***concave,*** *si la tangente se situe au-dessus de la courbe (Figure 4.7(a)).*

*Elle est dite* ***convexe*** *(ou concave vers le haut), si la tangente se situe au-dessous de la courbe (Figure 4.7(b)).*

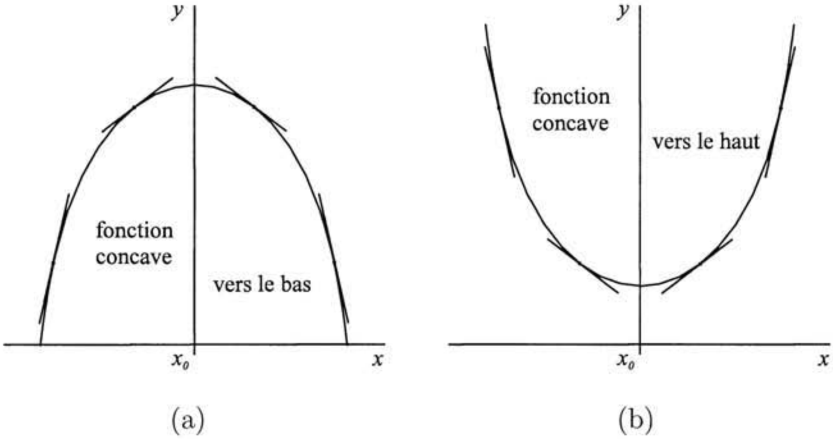



Figure 4.7: Concavité et convexité d'une fonction

On peut montrer que si $f''(x) > 0$ alors la fonction $f(x)$ est **convexe** (elle a une courbure positive). De la même façon, si $f''(x) < 0$ alors la fonction $f(x)$ est **concave** (elle a une courbure négative).

Cela s'explique géométriquement par le fait que si $f''(x) > 0$, alors $f'(x)$ est une fonction croissante. Or $f'(x)$ est la pente de la tangente au point $x$ et il est clair que si la pente de la tangente croît lorsque $x$ croît, la fonction est convexe (Figure 4.7(b)).

Si $f''(x) < 0$, alors $f'(x)$ est une fonction décroissante ; ainsi la pente de la tangente décroît lorsque $x$ croît et la fonction est donc concave (Figure 4.7(a)).

Considérons une fonction $f(x)$ et supposons que $f(x)$ et $f'(x)$ sont continues au point $x = x_0$. Il est géométriquement évident que si $f'(x_0) = 0$ et $f(x)$ est concave en $x = x_0$, alors $f(x)$ a un maximum relatif en $x = x_0$ (Figure 4.7(a)). De même, si $f'(x_0) = 0$ et $f(x)$ est convexe en $x = x_0$, alors $f(x)$ a un minimum relatif en $x = x_0$ (Figure 4.7(b)).

Il en découle un nouveau critère pour déterminer s'il s'agit d'un minimum ou d'un maximum :

supposons $f'(x)$ et $f''(x)$ continues au point $x = x_0$. Alors :

- $f'(x) = 0$ et $f''(x) > 0 \Rightarrow$ minimum relatif en $x = x_0$.
- $f'(x) = 0$ et $f''(x) < 0 \Rightarrow$ maximum relatif en $x = x_0$.

**Exemple 4.5** *Étudions la courbure et cherchons les minima et maxima de la fonction* $f(x) = x^3 - 2x^2 + x + 1$.

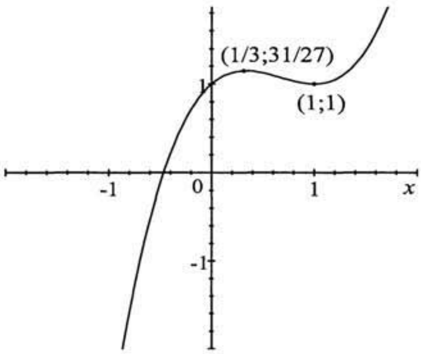



Figure 4.8: Graphe de $y = f(x) = x^3 - 2x^2 + x + 1$

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3x^2 - 4x + 1. \\ f''(x) &= 6x - 4. \end{aligned}$$

*Comme* $f''(x) < 0$ *pour* $x < \frac{2}{3}$, ***la fonction est concave pour*** $-\infty < x < \frac{2}{3}$. $f''(x) > 0$ *pour* $x > \frac{2}{3}$ *; par conséquent,* ***la fonction est convexe pour*** $\frac{2}{3} < x < \infty$.
*Cherchons à présent les extrema :*

$$\begin{aligned} f'(x) &= 0 \Rightarrow 3x^2 - 4x + 1 = 0 \\ &\Rightarrow x = 1 \quad et \quad x = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

*Remplaçons* $x = 1$ *dans* $f''(x)$ *:*

$$f''(1) = 6 \cdot 1 - 4 = 2 > 0.$$

*Le point* $(1; 1)$ *est donc un minimum relatif et la fonction est convexe en ce point. Remplaçons* $x = \frac{1}{3}$ *dans* $f''(x)$ *:*

$$f''\left(\frac{1}{3}\right) = 6 \cdot \frac{1}{3} - 4 = -2 < 0.$$

*Le point* $\left(\frac{1}{3}; \frac{31}{27}\right)$ *est donc un maximum et la fonction est concave en ce point (Figure 4.8).*

Le critère utilisant la dérivée seconde pour déterminer s'il s'agit d'un minimum ou d'un maximum relatif ne s'applique pas lorsque $f''(x_0) = 0$. Il existe cependant un critère fondé sur les dérivées d'ordre supérieur permettant de conclure quant à l'existence d'un extremum dans les cas suivants :

Si $f'(x_0) = f''(x_0) = f'''(x_0) = \ldots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$ et $f^{(n)}(x_0) \neq 0$, alors :

1° **Pour $n$ pair :** $f^{(n)}(x_0) > 0 \Rightarrow$ minimum relatif en $x = x_0$.

$f^{(n)}(x_0) < 0 \Rightarrow$ maximum relatif en $x = x_0$.

2° **Pour $n$ impair :** ni minimum ni maximum relatif en $x = x_0$.

**Exemple 4.6** *Soit la fonction* $f(x) = 3x^4 - 2x^3 + 1$*. Cherchons les minima et maxima de cette fonction :*

$$\begin{aligned}
f'(x) &= 12x^3 - 6x^2 = 6x^2(2x-1) \\
f'(x) &= 0 \Rightarrow 6x^2(2x-1) = 0 \Rightarrow x = 0 \ \textit{ou} \ x = \frac{1}{2}. \\
f''(x) &= 36x^2 - 12x \\
f''\left(\frac{1}{2}\right) &= 3 > 0 \Rightarrow \textit{minimum (absolu) en } x = \frac{1}{2}. \\
f''(0) &= 0 : \textit{on ne peut pas conclure. Calculons} \\
f'''(x) &= 72x - 12 \\
f'''(0) &= -12 \neq 0.
\end{aligned}$$

*D'après le critère ci-dessus, comme* $n = 3$ *est impair, on peut en conclure qu'en* $x = 0$*, il n'y a ni minimum ni maximum relatif (Figure 4.9).*

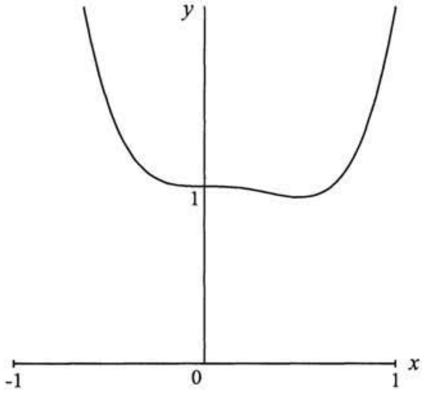



Figure 4.9: Graphe de $y = f(x) = 3x^4 - 2x^3 + 1$

## 4.5 Points d'inflexion des fonctions

Un **point d'inflexion** est un point où la courbure de la fonction change de sens. Il est évident qu'en un point d'inflexion la tangente traverse la courbe, puisque d'un côté de ce point la courbe est disposée au-dessus de la tangente et de l'autre côté au-dessous. Puisque le signe de la dérivée seconde nous indique le sens de courbure de la fonction, un changement de signe de la dérivée seconde implique un changement de courbure, et donc un point d'inflexion.

Si une fonction $f(x)$ a un point d'inflexion en $x = x_0$ en lequel la dérivée seconde est **continue**, alors $f''(x_0) = 0$. Cependant, il se peut que la fonction soit continue en $x = x_0$ et que $f''(x)$ soit discontinue en ce point. Ici encore, un changement de signe de la dérivée seconde lorsque $x$ passe par $x_0$ est nécessaire pour l'existence d'un point d'inflexion en $x = x_0$.

La marche à suivre pour déterminer les points d'inflexion d'une fonction $y = f(x)$ est la suivante :

1. Calculer $f''(x)$

2. (a) chercher les valeurs de $x$ pour lesquelles la dérivée seconde s'annule, c'est-à-dire résoudre l'équation : $f''(x) = 0$.

   (b) chercher les valeurs de $x$ pour lesquelles la dérivée seconde $f''(x)$ a des discontinuités.

3. Pour chaque valeur $x_0$ trouvée sous 2a et 2b, déterminer si $f''(x)$ change de signe lorsque $x$ passe en croissant par $x_0$ :

   $f''(x)$ change de signe en $x = x_0 \Rightarrow$ point d'inflexion en $x = x_0$.

   $f''(x)$ ne change pas de signe en $x = x_0 \Rightarrow$ aucun point d'inflexion en $x = x_0$.

4. Calculer la valeur de la fonction $f(x)$ pour chaque valeur $x_0$ en laquelle on a un point d'inflexion. On obtient ainsi les coordonnées des points d'inflexion.

**Note** Si $f''(x)$ et $f'''(x)$ sont continues en $x = x_0$, on peut utiliser le critère suivant : $f''(x_0) = 0$ et $f'''(x_0) \neq 0 \Rightarrow$ point d'inflexion en $x = x_0$. De manière plus générale, la fonction $y = f(x)$ admet un point d'inflexion en $x = x_0$ si $f''(x) = 0$ et si la **première dérivée non nulle** $f^{(n)}(x_0)$ est d'ordre impair ($n$ impair $> 2$).

**Exemple 4.7** *Soit la fonction* $y = f(x) = x^5$.

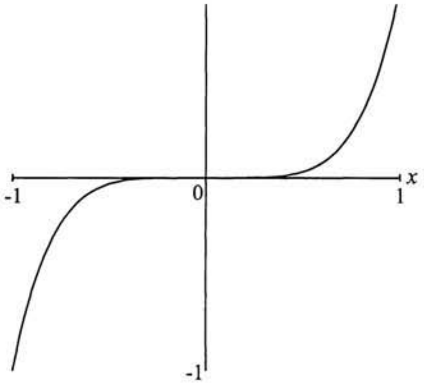



Figure 4.10: Graphe de $y = f(x) = x^5$

*Cherchons ses points d'inflexion :*

$$
\begin{array}{lll}
f'(x) = 5x^4 & f''(x) = 20x^3 & \\
f''(x) = 0 & \Rightarrow 20x^3 = 0 & \Rightarrow x = 0 \\
f'''(x) = 60x^2 & f'''(0) = 0 & \Rightarrow \textit{on ne peut pas conclure} \\
f^{iv}(x) = 120x & f^{iv}(0) = 0 & \\
f^{v}(x) = 120 & f^{v}(0) = 120 \neq 0. &
\end{array}
$$

*Ainsi,* $f''(0) = 0$ *et la première dérivée non nulle est d'ordre 5, donc impair. Par conséquent, le point (0; 0) est un point d'inflexion (Figure 4.10).*

**Exemple 4.8** *Cherchons les points d'inflexion de la fonction* $y = f(x) = \sqrt[3]{x}$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{3}x^{-2/3} \\ f''(x) &= -\frac{2}{9}x^{-5/3} = -\frac{2}{9} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{x^5}} \neq 0, \forall x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

*Comme* $f''(x)$ *ne s'annule jamais et qu'elle est discontinue en* $x = 0$*, il suffit d'examiner le signe de la dérivée seconde autour de* $x = 0$ *:*

$$\left. \begin{array}{ll} Si\ x < 0, & f''(x) > 0 \\ si\ x > 0, & f''(x) < 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \textit{point dinflexion en } x = 0 \textit{ (Figure 4.11).}$$

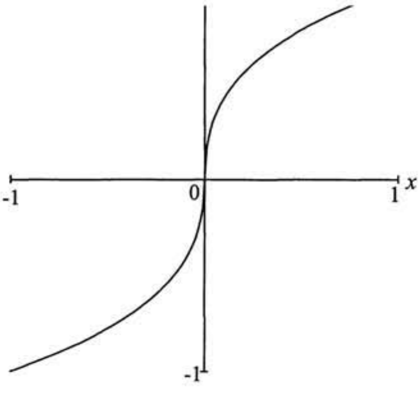



Figure 4.11: Graphe de $y = f(x) = \sqrt[3]{x}$.

## 4.6 Formes indéterminées

Dans le chapitre 3, nous avons vu comment il était possible de trouver la limite d'une forme indéterminée $\frac{0}{0}$ et $\frac{\infty}{\infty}$.

À l'aide de la notion de dérivée, nous pouvons maintenant étudier une procédure plus générale pour déterminer la limite des formes indéterminées. Cette procédure est fondée sur la **règle de l'Hospital.**

- **Forme indéterminée** $\frac{0}{0}$

  Règle de l'Hospital : si $c$ est un nombre réel, si $f(x)$ et $g(x)$ sont dérivables et $g'(x) \neq 0$ pour tout $x$ tel que $0 <| x - c |< \delta$, si $\lim_{x \to c} f(x) = 0$ et $\lim_{x \to c} g(x) = 0$, alors quand $\lim_{x \to c} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ existe ou est infinie,

  $$\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to c} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

  Si $\frac{f'(x)}{g'(x)}$ est encore une forme indéterminée $\frac{0}{0}$, on peut de nouveau appliquer la règle de l'Hospital :

  $$\lim_{x \to c} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \to c} \frac{f''(x)}{g''(x)}.$$

Il se peut donc que l'on obtienne toujours une forme indéterminée ou que la limite du rapport des dérivées n'existe pas. Dans ce cas, on doit chercher la limite par d'autres méthodes.
**Remarque** La conclusion de la règle de l'Hospital reste inchangée pour d'autres types de limites, notamment lorsque $x \to c$ est remplacé par : $x \to c^+$, $x \to c^-$, $x \to \infty$, $x \to -\infty$.

**Exemple 4.9** *Calculons les différentes limites :*

1. $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x}$. *Lorsque $x \to 0$, numérateur et dénominateur tendent vers 0.* *En utilisant la règle de l'Hospital,*

   $$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\cos x}{1} = 1.$$

2. $\lim_{x \to 0} \frac{6x^2}{3e^x - x^3 - 3x - 3}$. *Il s'agit d'une forme indéterminée $\frac{0}{0}$.* *Par la règle de l'Hospital :*

   $$\lim_{x \to 0} \frac{6x^2}{3e^x - x^3 - 3x - 3} = \lim_{x \to 0} \frac{12x}{3e^x - 3x^2 - 3}.$$

*Comme la fonction obtenue est encore de type* $\frac{0}{0}$*, on peut à nouveau utiliser la règle de l'Hospital :*

$$\lim_{x\to 0} \frac{12x}{3e^x - 3x^2 - 3} = \lim_{x\to 0} \frac{12}{3e^x - 6x} = \frac{12}{3} = 4.$$

3. $\lim\limits_{x\to 1^+} \frac{\sqrt{x+8}-3}{\sqrt{x-1}}$. *La limite lorsque* $x \to 1$ *n'existe pas car* $\sqrt{x-1}$ *n'est définie que pour* $x \geq 1$. *Cependant, la limite à droite lorsque* $x \to 1^+$ *est de la forme* $\frac{0}{0}$ *et peut être trouvée à l'aide de la règle de l'Hospital :*

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{\sqrt{x+8}-3}{\sqrt{x-1}} = \lim_{x\to 1^+} \frac{\frac{1}{2}(x+8)^{-1/2}}{\frac{1}{2}(x-1)^{-1/2}} = \lim_{x\to 1^+} \frac{(x-1)^{1/2}}{(x+8)^{1/2}} = 0.$$

4. $\lim\limits_{x\to 2} \frac{\sqrt{x+2}-2}{(x-2)^2}$. *La limite est de la forme* $\frac{0}{0}$. *La limite de* $\frac{f'(x)}{g'(x)}$*, lorsque* $x$ *tend vers 2, est infinie, car :*

$$\lim_{x\to 2^-} \frac{\sqrt{x+2}-2}{(x-2)^2} = \lim_{x\to 2^-} \frac{\frac{1}{2}(x+2)^{-1/2}}{2(x-2)} = -\infty.$$

*et*

$$\lim_{x\to 2^+} \frac{\sqrt{x+2}-2}{(x-2)^2} = \lim_{x\to 2^+} \frac{\frac{1}{2}(x+2)^{-1/2}}{2(x-2)} = \infty.$$

- **Forme indéterminée** $\frac{\infty}{\infty}$

La règle, pour une forme indéterminée $\frac{\infty}{\infty}$, est exactement la même que pour une forme $\frac{0}{0}$, excepté que 0 est remplacé par $\infty$ : si $\lim\limits_{x\to c} f(x) = \infty$ et $\lim\limits_{x\to c} g(x) = \infty$, alors quand $\lim\limits_{x\to c} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ existe ou est infinie,

$$\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to c} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Ici encore, la règle de l'Hospital pour une forme indéterminée $\frac{\infty}{\infty}$ est valable lorsque : $x \to c^+, x \to c^+, x \to +\infty, x \to -\infty$.

**Exemple 4.10** *Calculons la limite* $\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{5x}$ *. Il s'agit d'une forme indéterminée* $\frac{\infty}{\infty}$*. Appliquons la règle de l'Hospital :*

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{5x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1/x}{5} = 0.$$

Pour les autres formes indéterminées, on peut aussi utiliser la règle de l'Hospital, mais il faut avant tout les réduire à une expression $\frac{0}{0}$ ou $\frac{\infty}{\infty}$.

- **Forme indéterminée $\infty - \infty$**

  Si $\lim_{x\to c}[f(x) - g(x)]$ est de la forme $\infty - \infty$ , c'est-à-dire $\lim_{x\to c} f(x) = \infty$ et $\lim_{x\to c} g(x) = \infty$, alors :

$$\lim_{x\to c}[f(x) - g(x)] = \lim_{x\to c} \frac{\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{f(x)}}{\frac{1}{g(x)} \cdot \frac{1}{f(x)}} \text{ est de la forme } \frac{0}{0},$$

  forme indéterminée que l'on résoudra par la règle de l'Hospital.

**Exemple 4.11** *Calculons la limite* $\lim_{x\to 0} \left(\frac{2}{x} - \frac{2}{e^x - 1}\right)$.

*Cette limite est du type* $\infty - \infty$*. Avec* $f(x) = \frac{2}{x}$ *et* $g(x) = \frac{2}{e^x - 1}$*, on obtient :*

$$\lim_{x\to c} \frac{\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{f(x)}}{\frac{1}{g(x)} \cdot \frac{1}{f(x)}} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{e^x - 1}{2} - \frac{x}{2}}{\frac{e^x - 1}{2} \cdot \frac{x}{2}} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x - x - 1}{\frac{1}{2}x(e^x - 1)}$$

*qui est une forme indéterminée* $\frac{0}{0}$*. Par la règle de l'Hospital :*

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{e^x - x - 1}{\frac{1}{2}x(e^x - 1)} &= \lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{\frac{1}{2}(xe^x + e^x - 1)} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{e^x}{\frac{1}{2}(xe^x + e^x + e^x)} = \frac{1}{\frac{1}{2} \cdot 2} = 1.
\end{aligned}$$

*Ainsi,* $\lim_{x\to 0} \left(\frac{2}{x} - \frac{2}{e^x - 1}\right) = 1$.

- **Forme indéterminée** $0 \cdot \infty$

  Si $\lim_{x \to c}[f(x) \cdot g(x)] = 0 \cdot \infty$ , c'est-à-dire $\lim_{x \to c} f(x) = 0$ et $\lim_{x \to c} g(x) = \infty$, alors $\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{1/g(x)}$ est de la forme $\frac{0}{0}$.

  Alternativement, $\lim_{x \to c} \frac{g(x)}{1/f(x)}$ est de la forme $\frac{\infty}{\infty}$.

**Exemple 4.12** *Calculons la limite* $\lim_{x \to 0^+} (x^2 \cdot \ln x)$.

*Il s'agit d'une forme indéterminée* $0 \cdot \infty$.
*Avec* $f(x) = x^2$ *et* $g(x) = \ln x$, *on obtient :*

$$\lim_{x \to 0^+} x^2 \cdot \ln x = \lim_{x \to 0^+} \frac{\ln x}{1/x^2}$$

*qui est une forme indéterminée* $\frac{\infty}{\infty}$. *Par la règle de l'Hospital :*

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\ln x}{1/x^2} = \lim_{x \to 0^+} \frac{1/x}{-2/x^3} = \lim_{x \to 0^+} \frac{-x^3}{2x} = -\lim_{x \to 0^+} \frac{x^2}{2} = 0.$$

- **Formes indéterminées** $0^0, 1^\infty, \infty^0$

  Si $\lim_{x \to c}[f(x)]^{g(x)}$ est l'une de ces formes, alors on pose :

  $$y = [f(x)]^{g(x)}.$$

  Si $\lim_{x \to c} \ln y = b$, alors $\lim_{x \to c} y = e^b$. En particulier si $b = -\infty$ ou $\infty$, on obtient respectivement $\lim_{x \to c} y = 0$ ou $\lim_{x \to c} y = \infty$.

**Exemple 4.13** *Calculons les limites suivantes :*

1. $\lim_{x \to 2^+} (x-2)^{x^2-4}$. *Il s'agit d'une forme indéterminée* $0^0$. *Calculons par conséquent :*

$$\begin{aligned} \lim_{x \to 2^+} \ln((x-2)^{x^2-4}) &= \lim_{x \to 2^+} [(x^2-4) \cdot \ln(x-2)] \\ &= \lim_{x \to 2^+} \frac{\ln(x-2)}{\frac{1}{x^2-4}}. \end{aligned}$$

*Il s'agit d'une forme* $\frac{\infty}{\infty}$ *et nous pouvons appliquer la règle de l'Hospital :*

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 2^+}\frac{\ln(x-2)}{\frac{1}{x^2-4}} &= \lim_{x\to 2^+}\frac{1/(x-2)}{\frac{-2x}{(x^2-4)^2}} = \lim_{x\to 2^+}\frac{(x^2-4)^2}{-2x(x-2)} \\ &= \lim_{x\to 2^+}\frac{4x(x^2-4)}{-4x+4} = \frac{0}{-4} = 0.\end{aligned}$$

*Par conséquent :* $\lim_{x\to 2^+}(x-2)^{x^2-4} = e^0 = 1.$

*2.* $\lim_{x\to\pm\infty}(1+x^2)^{1/x}$. *Il s'agit d'une forme indéterminée* $\infty^0$. *Calculons :*

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\pm\infty}\ln(1+x^2)^{1/x} &= \lim_{x\to\pm\infty}\frac{1}{x}\ln(1+x^2) \\ &= \lim_{x\to\pm\infty}\frac{\ln(1+x^2)}{x} \\ &= \lim_{x\to\pm\infty}\frac{2x}{1+x^2} \\ &= \lim_{x\to\pm\infty}\frac{2}{2x} = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{1}{x} = 0.\end{aligned}$$

*et donc,* $\lim_{x\to\pm\infty}(1+x^2)^{1/x} = e^0 = 1.$

## 4.7 Étude complète d'une fonction

Voici les points que nous devons étudier dans une fonction :

1. Domaine de définition et continuité
2. Parité d'une fonction
3. Intersection avec les axes
4. Asymptotes verticales
5. Asymptotes horizontales ou obliques
6. Première dérivée

7. Deuxième dérivée
8. Minima et maxima
9. Points d'inflexion
10. Tableau de variation
11. Graphe

Nous allons reprendre en détail certains de ces points. Les autres ont déjà été étudiés dans les paragraphes précédents. Finalement, nous aborderons un exemple complet d'étude de fonction.

- **Domaine de définition et continuité**

  Le domaine de définition comprend les $x$ pour lesquels on peut trouver une image $y$. Sont exclus de cet ensemble, les $x$ pour lesquels la fonction présente une discontinuité. On note par $D$ l'ensemble de définition.

**Exemple 4.14** *Si la fonction est* $f(x) = x^2 - 3x + 4$, *tous les* $x$ *réels ont une image par la fonction* $f(x)$. *Le domaine de définition est, par conséquent, l'ensemble des nombres réels* $\mathbb{R}$.

**Exemple 4.15** *La fonction* $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x-2}$ *présente une discontinuité (infinie) en* $x = 2$. *Nous devons, par conséquent, exclure* $x = 2$ *de l'ensemble de définition et nous écrivons* $D = \mathbb{R} - \{2\}$ *qui signifie que le domaine de définition* $D$ *est égal au complémentaire de 2 par rapport à* $\mathbb{R}$, *ou encore* $D$ *est tout* $\mathbb{R}$ *sauf* 2.

- **Parité de la fonction**

  **Définition 4.4** *Une fonction est dite* ***paire*** *si* $f(x) = f(-x)$ *pour tout* $x$ *du domaine de définition. Elle est dite* ***impaire*** *si* $f(-x) = -f(x)$ *pour tout* $x$ *du domaine de définition. Dans les autres cas, elle n'est ni paire ni impaire.*

  Le graphe d'une fonction paire est symétrique par rapport à l'axe des $y$. Le graphe d'une fonction impaire est symétrique par rapport à l'origine.

**Exemple 4.16** *Soit la fonction* $f(x) = x^3$. *Son domaine de définition est* $D = \mathbb{R} - \{2\}$. *Cette fonction est impaire puisque :*

$$f(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -f(x), \forall x \in \mathbb{R}.$$

**Exemple 4.17** *Soit la fonction* $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x-2}$. *Son domaine de définition est* $D = \mathbb{R} - \{2\}$. *Montrons que cette fonction n'est ni paire ni impaire : pour cela, il suffit de trouver une valeur* $x_0 \in D$ *telle que* $f(x_0) \neq f(-x_0)$ *et* $f(-x_0) \neq -f(x_0)$.
*Soit* $x_0 = 1$ *;* $f(1) = \dfrac{2}{-1} = -2$ *et* $f(-1) = \dfrac{2}{-3} = -\dfrac{2}{3}$.
*Ainsi,* $f(1) \neq f(-1) \Rightarrow$ *la fonction n'est pas paire.*
*D'autre part,* $f(-1) \neq -f(1) \Rightarrow$ *la fonction n'est pas impaire.*

- **Asymptotes**

**Définition 4.5** *Une droite d est dite asymptote à une courbe si la distance* $\delta$ *du point courant P de la courbe à cette droite tend vers zéro, lorsque le point P s'éloigne à l'infini (c'est-à-dire le point* $P(x; y)$ *a l'une au moins de ses coordonnées qui tend vers l'infini).*
*Les trois cas qui peuvent se présenter sont illustrés par la figure 4.12.*

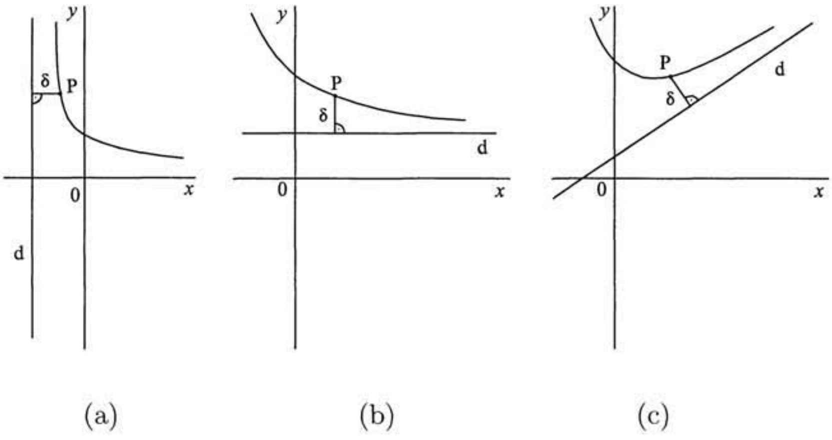



Figure 4.12: Asymptotes (a) verticale, (b) horizontale, (c) oblique

- **Asymptotes verticales**

**Définition 4.6** *Une asymptote à la courbe $y = f(x)$ est dite* ***asymptote verticale*** *si l'équation de celle-ci est de la forme $x = a$, où $a \in \mathbb{R}$. Dans ce cas, l'une des égalités suivantes a lieu :*

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = \pm\infty, \quad \lim_{x \to a^+} f(x) = \pm\infty, \quad \lim_{x \to a} f(x) = \pm\infty.$$

**Définition 4.7** *Inversement, on déduit de la définition d'une asymptote que si l'une au moins des égalités ci-dessus a lieu, alors la droite $x = a$ est une asymptote verticale.*

**Exemple 4.18** *Reprenons la fonction $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x-2}$ dont le domaine de définition est $\mathbb{R} - \{2\}$.*
*Comme $\lim\limits_{x \to 2^-} \dfrac{x^2+1}{x-2} = -\infty$, la droite $x = 2$ est asymptote verticale à la courbe $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x-2}$.*
*De même, $\lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{x^2+1}{x-2} = \infty$, on retrouve $x = 2$ comme asymptote verticale (Figure 4.13).*

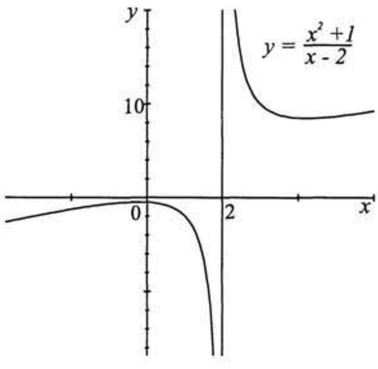



Figure 4.13: Asymptote verticale en $x = 2$

- **Asymptotes horizontales**

**Définition 4.8** *Une asymptote à la courbe $y = f(x)$ est dite **asymptote horizontale** si l'équation de celle-ci est de la forme $y = b$, où $b \in \mathbb{R}$. Dans ce cas, l'une au moins des égalités suivantes a lieu :*

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = b$$
$$\text{ou} \quad \lim_{x \to +\infty} f(x) = b.$$

*Inversement, si l'une au moins des égalités ci-dessus a lieu, alors la droite $y = b$ est une asymptote horizontale.*

**Exemple 4.19** *Soit la fonction $f(x) = \dfrac{x+1}{x-4}$. Étudions les limites de cette fonction quand $x$ tend vers plus ou moins l'infini :*

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x+1}{x-4} = 1$$
$$\text{et} \qquad \lim_{x \to -\infty} \frac{x+1}{x-4} = 1.$$

*Ainsi, nous avons une asymptote horizontale en $y = 1$ (Figure 4.14).*

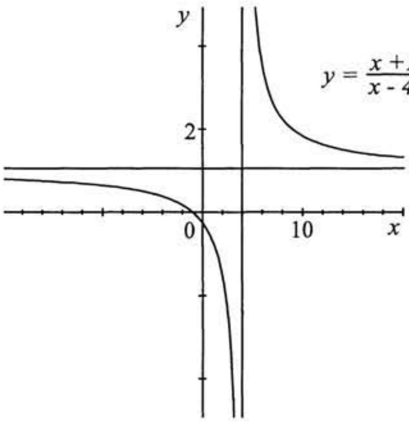



Figure 4.14: Asymptote horizontale en $y = 1$

- **Asymptotes obliques**

**Définition 4.9** *Une asymptote à la courbe $y = f(x)$ est dite* ***asymptote oblique*** *si l'équation de celle-ci est de la forme $y = ax + b$, où $a \neq 0$ avec $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$.*
*Dans ce cas, on trouve les coefficients $a$ et $b$ à l'aide des formules (4.1) et (4.2) :*

$$a = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} \qquad (4.1)$$
$$b = \lim_{x\to\infty} (f(x) - ax) \qquad (4.2)$$

*Inversement, si les limites (4.1) et (4.2) existent avec $a \neq 0$, alors la droite $y = ax + b$ est une asymptote oblique. Le même principe reste valable lorsque $x \to -\infty$.*

**Exemple 4.20** *Soit la fonction de l'exemple 4.17 : $f(x) = \frac{x^2+1}{x-2}$. Il n'existe pas d'asymptote horizontale puisque par la règle de l'Hospital :*

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x^2+1}{x-2} = \lim_{x\to-\infty} \frac{2x}{1} = -\infty \quad et \quad \lim_{x\to\infty} \frac{x^2+1}{x-2} = \lim_{x\to\infty} \frac{2x}{1} = \infty.$$

*En revanche, cette fonction admet une asymptote oblique $y = ax+b$ que nous allons chercher :*

$$\begin{aligned}
a &= \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{x^2+1}{x(x-2)} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{2x}{2x-2} = 1. \\
b &= \lim_{x\to\infty} (f(x) - ax) \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{x^2+1}{x-2} - 1 \cdot x \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{x^2+1-x^2+2x}{x-2} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{2x+1}{x-2} = 2.
\end{aligned}$$

*On trouve exactement les mêmes résultats lorsque $x \to -\infty$. Ainsi, cette fonction admet une asymptote oblique d'équation :*

$$y = x + 2 \text{ (voir Figure 4.15).}$$

- **Tableau de variation**

  Nous pouvons résumer dans un tableau tout ce qui est intéressant, à savoir les extrema, les points d'inflexion, la concavité et la croissance de la fonction. Voici un exemple fictif d'un tableau de variation de la fonction $y = f(x)$ :

| $x$ | $-\infty$ | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y'$ | $-$ | $-$ | 0 | $+$ | 0 | $-$ | $-$ |
| $y''$ | $-$ | 0 | $+$ | 0 | $-$ | 0 | $+$ |
| $y$ | $\searrow$ | $\searrow$ | min | $\nearrow$ | max | $\searrow$ | $\searrow$ |
| | $\bigcap$ | pt infl. | $\bigcup$ | pt infl. | $\bigcap$ | pt infl. | $\bigcup$ |

  **Remarque** Pour les première et seconde dérivées, seul le signe (+ ou $-$) nous intéresse.

  Les flèches $\searrow$ indiquent que la fonction décroît, tandis que les flèches $\nearrow$ indiquent que la fonction croît. Min et max indiquent respectivement un minimum et un maximum. Le signe $\bigcap$ représente la concavité vers le bas, tandis que le signe $\bigcup$ représente la concavité vers le haut. Les points d'inflexion sont abrégés “pt infl”.

- **Graphe**

  Nous représentons tout ce que nous avons trouvé sur le graphe : la fonction elle-même, les intersections avec les axes, les minima, les maxima, les points d'inflexion et les asymptotes.

Nous allons maintenant donner un exemple complet d'étude de fonction.

**Exemple 4.21** *Étude complète de* $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x-2}$.

1. *Domaine de définition et continuité :* $D = \mathbb{R} - \{2\}$ *(exemple 4.15).*

2. *Parité de la fonction : ni paire, ni impaire (exemple 4.17).*

3. *Intersections avec les axes :*

$$x = 0 \Rightarrow y = \frac{0^2 + 1}{0 - 2} = -\frac{1}{2}.$$

*Nous avons donc le point* $\left(0\ ; -\frac{1}{2}\right)$.

$$\begin{aligned} y &= 0 \Rightarrow \frac{x^2+1}{x-2} = 0 \\ &\Rightarrow x^2 + 1 = 0. \end{aligned}$$

*Il n'y a pas d'intersection avec l'axe des $x$ car $x^2 + 1 \geq 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$.*

4. *Asymptote verticale : asymptote verticale en $x = 2$ (exemple 4.18).*

5. *Asymptote horizontale : il n'en existe pas (exemple 4.20).*
   *Asymptote oblique : asymptote oblique d'équation $y = x + 2$ (exemple 4.20).*

6. *Première dérivée :*

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{vu' - uv'}{v^2} \\ &= \frac{2x(x-2) - (x^2+1)}{(x-2)^2} \\ &= \frac{x^2 - 4x - 1}{(x-2)^2}. \end{aligned}$$

7. *Deuxième dérivée :*

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{vu' - uv'}{v^2} \\ &= \frac{(2x-4)(x-2)^2 - 2(x^2-4x-1)(x-2)}{(x-2)^4} \\ &= \frac{(2x-4)(x-2) - 2(x^2-4x-1)}{(x-2)^3} \\ &= \frac{10}{(x-2)^3}. \end{aligned}$$

8. *Minima et maxima :*

$$f'(x) = 0$$
$$\frac{x^2-4x-1}{(x-2)^2} = 0$$
$$x^2-4x-1 = 0$$
$$x_1, x_2 = \frac{4 \pm \sqrt{16+4}}{2} \Rightarrow \begin{cases} x_1 \cong & 4.24 \\ x_2 \cong & -0.24 \end{cases}$$

*On remplace* $x_1$ *dans* $f(x)$ *pour obtenir* $y_1$ *:*

$$y_1 = \frac{x_1^2+1}{x_1-2} \cong 8.47.$$

*On remplace* $x_2$ *dans* $f(x)$ *pour obtenir* $y_2$ *:*

$$y_2 = \frac{x_2^2+1}{x_2-2} \cong -0.47.$$

*Pour voir si* $(4.24; 8.47)$ *et* $(-0.24; -0.47)$ *sont des maxima ou des minima, on remplace* $x_1$ *et* $x_2$ *dans* $f''(x)$ *:*

$$f''(4.24) = \frac{10}{(4.24-2)^3} > 0 : \textit{minimum.}$$
$$f''(-0.24) = \frac{10}{(-0.24-2)^3} < 0 : \textit{maximum.}$$

9. *Points d'inflexion :*

$$f''(x) = 0 \Rightarrow \frac{10}{(x-2)^3} = 0.$$

*Il n'y a pas de solution ; par conséquent, aucun point d'inflexion.*

10. *Tableau de variation :*

| $x$ | $-\infty$ | $-0,24$ | $0$ | $2$ | $4.24$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $y'$ | $+$ | $0$ | $-$ | | $0$ | $+$ |
| $y''$ | $-$ | $-$ | $-$ | | $+$ | $+$ |
| $y$ | $\nearrow$ | *max* | $\searrow$ | $\Vert$ | *min* | $\nearrow$ |
| $\cap$ | $\cap$ | $\cap$ | $\cap$ | *a.v.* | $\cup$ | $\cup$ |

11. *Graphe :*
*Le graphe de cette fonction est illustré par la figure 4.15.*

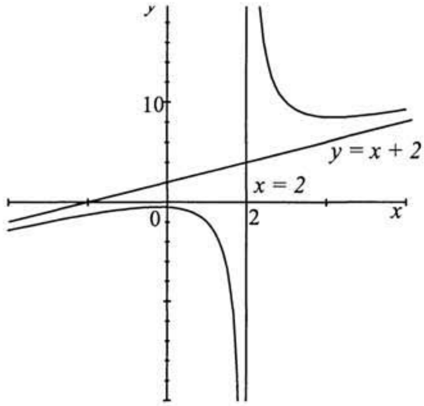



Figure 4.15: Graphe de $y = f(x) = \frac{x^2+1}{x-2}$

## 4.8 Applications économiques des dérivées

Les applications des dérivées en économie sont nombreuses. Dans ce paragraphe, nous nous limiterons aux notions de coût et de revenu marginaux ainsi qu'au profit en régime de monopole.

- **Coût marginal**

  Si l'on suppose que le coût total de production $y$ est fonction uniquement du nombre d'unités produites $x$, on peut représenter la fonction du coût total comme suit :

$$y = f(x).$$

  En général, la fonction du coût total a les propriétés suivantes :

  1. Lorsqu'on ne produit rien, le coût total est positif ou nul, c'est-à-dire : $f(0) \geq 0$. Si $f(0) > 0$, la quantité $f(0)$ représente les coûts fixes de production.
  2. Le coût total croît quand la production croît, c'est-à-dire que $f'(x)$ n'est jamais négative.

     Si le coût total est $CT = y = f(x)$, le **coût moyen** ou le coût par unité est égal à :

$$CM = \frac{f(x)}{x}$$

et le **coût marginal** est la première dérivée par rapport à $x$ du coût total :

$$CMa = y' = f'(x) = \frac{dy}{dx}.$$

**Exemple 4.22** *Si le coût total est* $CT = x^3 - 3x^2 + 3x + 1$, *le coût moyen est égal à* $CM = \dfrac{CT}{x} = x^2 - 3x + 3 + \dfrac{1}{x}$, *et le coût marginal est égal à* $CMa = \dfrac{dCT}{dx} = 3x^2 - 6x + 3$.
*On remarque que la courbe du coût marginal coupe celle du coût moyen au minimum du coût moyen, comme le montre la figure 4.16.*

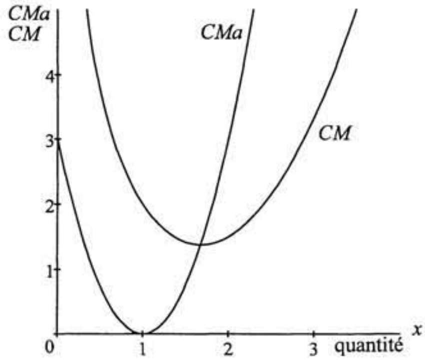



Figure 4.16: $CMa = 3x^2 - 6x + 3$ et $CM = x^2 - 3x + 3 + \dfrac{1}{x}$

- **Revenu marginal**

  Pour toute fonction de demande $y = f(x)$ où $y$ représente le prix par unité demandée et $x$ le nombre d'unités demandées, le revenu total $RT$ est égal au produit de $x$ par $y$.

$$RT = x \cdot y = x \cdot f(x).$$

Le **revenu marginal** est égal à la première dérivée par rapport à $x$ du revenu total :

$$RMa = \frac{dRT}{dx}.$$

**Exemple 4.23** *Soit la fonction de demande $y = -2x + 3$. Le revenu total est égal à :*

$$RT = x \cdot y = x \cdot (-2x + 3) = -2x^2 + 3x.$$

*Le revenu marginal est donc la première dérivée par rapport à $x$ du revenu total :*

$$RMa = \frac{dRT}{dx} = -4x + 3$$

*Le revenu total et le revenu marginal sont représentés par la figure 4.17.*

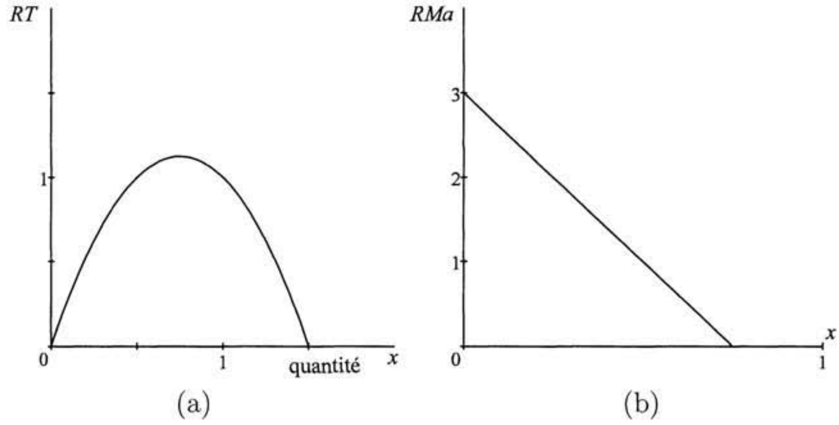



Figure 4.17: Revenu total (a) et revenu marginal (b)

- **Profit en régime de monopole**

  En général, le monopoleur va contrôler l'offre $x$ et le prix $y$ (déterminé par la fonction de demande) afin de maximiser son profit. La fonction du profit total résulte de la différence entre le revenu total et le coût total :

$$PT = RT - CT.$$

  Le profit total est maximum si :

$$\begin{aligned} 1)\ \frac{dPT}{dx} &= 0 \text{ et} \\ 2)\frac{d^2PT}{dx^2} &< 0. \end{aligned}$$

En d'autres termes, $\frac{dPT}{dx}$ est égal à $\frac{dRT}{dx} - \frac{dCT}{dx}$.

Or, $\frac{dRT}{dx} = RMa$ et $\frac{dCT}{dx} = CMa$.

Par conséquent, $\frac{dPT}{dx} = 0$ (première condition) revient au même que $RMa = CMa$, ce qui signifie que le profit est maximum quand le revenu marginal est égal au coût marginal.

**Exemple 4.24** *La fonction de demande d'un certain bien est :*

$$y = 18 - 5x$$

*et le coût total pour le monopoleur est :*

$$CT = x^3 - 3x^2 + 3x + 1.$$

*On va chercher le profit maximum que le monopoleur peut obtenir. Le revenu total est égal à :*

$$\begin{aligned} RT &= x \cdot y \\ &= x(18 - 5x) \\ &= 18x - 5x^2. \end{aligned}$$

*Le profit total est donc :*

$$\begin{aligned} PT &= RT - CT \\ &= 18x - 5x^2 - (x^3 - 3x^2 + 3x + 1) \\ &= -x^3 - 2x^2 + 15x - 1. \end{aligned}$$

*La première condition pour avoir un profit maximum est :*
$\frac{dPT}{dx} = 0$, *c'est-à-dire* $-3x^2 - 4x + 15 = 0$.
*Nous obtenons deux solutions :*

$$x = -3 \text{ et } x = \frac{5}{3}.$$

*La première est irrecevable car une quantité négative n'a aucun sens en économie, du moins dans ce contexte. Nous vérifions donc la deuxième condition,*

*à savoir* $\frac{d^2PT}{dx^2} < 0$, *avec la solution* $x = \frac{5}{3}$.
$\frac{d^2PT}{dx^2} = -6x - 4$, *et avec* $x = \frac{5}{3}$, $\frac{d^2PT}{dx^2} < 0$. *Il y a bien maximum en* $x = \frac{5}{3}$.
*Pour avoir le profit maximum, on remplace* $x = \frac{5}{3}$ *dans le PT:*

$$Pmax = -\left(\frac{5}{3}\right)^3 - 2\left(\frac{5}{3}\right)^2 + 15\left(\frac{5}{3}\right) - 1 = 13.81.$$

*Si nous prenons l'autre méthode et égalisons RMa et CMa, nous obtenons le même résultat :*

$$\begin{aligned} RMa &= CMa \\ 18 - 10x &= 3x^2 - 6x + 3 \\ -3x^2 - 4x + 15 &= 0. \end{aligned}$$

*Nous pouvons représenter graphiquement cette deuxième méthode (Figure 4.18). Si l'on représente les courbes de demande et de coût moyen (qui est* $CM = x^2 - 3x + 3 + \frac{1}{x}$*) sur le même graphe, le profit maximum est représenté par la surface hachurée :*

$$\begin{aligned} ABEF &= ABCD - EFCD \\ \textit{profit maximum} &= \textit{revenu total-coût total} \end{aligned}$$

*Le profit maximum peut être calculé par* $BF \cdot CD$ *où* $CD$ *représente la solution* $x$ *pour laquelle* $RMa = CMa$, $B$ *est la valeur de la demande quand on remplace la solution dans l'équation et* $F$ *est la valeur du coût moyen pour la même quantité* $x$.

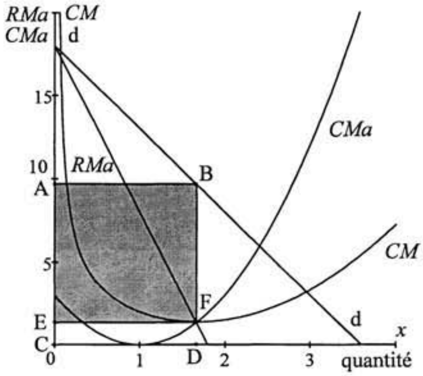



Figure 4.18: Surface hachurée : profit maximum

# Exercices

1. La somme de deux nombres positifs est 100.
   Trouver le couple de nombres :
   (a) dont le produit est maximal.
   (b) dont la somme des carrés est minimale.

2. On construit une boîte de base rectangulaire, sans couvercle, ayant 2 faces carrées, de 10 m$^3$ de volume, pour un prix de 100 francs/m$^2$ pour la base et de 60 francs/m$^2$ pour les côtés.
   Faire une esquisse de la situation.
   Chercher les dimensions de la boîte qui permettent de minimiser le prix.

3. Montrer que les points d'inflexion de la fonction $y = \dfrac{1-x}{1+x^2}$ sont sur une droite, dont il faut trouver l'équation.
   Représenter le tout graphiquement.

4. Quelles doivent être les dimensions d'un cylindre de volume V pour que sa surface totale S soit minimale ?

   **Note** Un cylindre est entièrement déterminé par son rayon de base r et sa hauteur h.

5. Faire le graphe de la fonction $y = 2\sin x + \cos 2x$, puis déterminer les maxima et minima de cette fonction sur l'intervalle $[0\,;2\pi]$.

6. Montrer que parmi tous les rectangles inscrits dans un cercle donné, le carré a une surface maximale.
   Montrer aussi que le périmètre est maximal pour le carré.

7. Faire une étude complète de la fonction : $y = -x^3 + x^2 + 2x$.

8. Faire le graphe et étudier les asymptotes de la fonction :

$$y = \frac{x^2 + 2x - 1}{x}.$$

9. Faire le graphe et trouver les extrema de la fonction :

$$y = (2x^2 - x^3)^{1/3}.$$

   Étudier ensuite soigneusement l'asymptote de cette fonction.

10. Faire une étude complète de la fonction suivante :

$$y = \frac{(\ln x)^2}{x}.$$

11. Calculer la limite des fonctions suivantes par la règle de l'Hospital :

    (a) $\lim_{x \to 3} \frac{x^2 - 2x - 3}{(x-3)^2}$ (b) $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x}$ (c) $\lim_{x \to 0} \frac{\sin ax}{x}$

    (d) $\lim_{x \to b} \frac{x^n - b^n}{x - b}$ (e) $\lim_{x \to 0} \frac{e^{3x} + 3x^2}{4e^x + 2x^2}$ (f) $\lim_{x \to 1} \frac{3x \ln x}{x^2 - x}$

    (g) $\lim_{x \to \infty} \frac{x^2}{e^x}$ (h) $\lim_{x \to \infty} \frac{\ln x}{x}$ (i) $\lim_{x \to \infty} \frac{e^x + 3x^2}{4e^x + 2x^2}$

12. Montrer que si la fonction $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ admet deux extrema, alors l'un est un maximum et l'autre est un minimum.
    En déduire que, dans ce cas, le point d'inflexion se situe entre ces deux extrema.

13. Étudier la fonction : $y = \frac{e^{-1/x}}{x}$.

14. Une entreprise de machines de précision a une fonction de coût total représentée par l'équation $CT = 2x^3 - 3x^2 - 12x$ , où $CT$ indique le coût et $x$ la quantité.

(a) Quelle est l'équation de la fonction du coût marginal?

(b) Quelle est l'équation de la fonction du coût moyen?
À quel point le coût moyen est-il à son minimum?

(c) Est-ce que l'on peut s'attendre à trouver de telles équations dans la pratique?

15. La demande d'un certain bien est $y = 12 - x$, où $y$ est le prix et $x$ la quantité. Déterminer le prix et la quantité pour lesquels le revenu est maximal. Représenter graphiquement la demande, le revenu total et le revenu marginal.

16. Un fabricant de postes de radio produit $q$ postes par semaine à un coût total de $\frac{q^2}{25} + 3q + 100$ francs. Il est en régime de monopole et la demande de son marché est $q = 75 - 3p$, où $p$ est le prix d'un poste. Trouver le nombre de postes que ce fabricant doit produire par semaine pour maximiser son bénéfice.
Quel est le bénéfice maximum? Quel est le prix de monopole?

# Chapitre 5

# Intégrales

## 5.1 Introduction

Dans le chapitre 3, nous avons étudié le problème suivant : étant donné une fonction, trouver sa dérivée. Dans ce chapitre, nous considèrerons le problème inverse : étant donné une fonction $f(x)$, trouver une fonction $F(x)$ telle que sa dérivée soit égale à $f(x)$, c'est-à-dire $F'(x) = f(x)$.

En économie, l'intégration peut notamment être utilisée pour trouver la fonction de coût total lorsque la fonction de coût marginal est donnée ou encore pour trouver la fonction de revenu total lorsque la fonction de revenu marginal est donnée.

D'autre part, l'intégration joue un rôle important dans le calcul de l'aire comprise entre plusieurs courbes. Par exemple, le revenu total peut être considéré comme l'aire comprise entre la courbe du revenu marginal et les axes, le surplus du consommateur comme l'aire comprise entre la courbe de demande et les axes, et ainsi de suite.

## 5.2 Intégrale indéfinie

Reprenons le problème inverse de la dérivation : étant donné une fonction $f(x)$, trouver une fonction $F(x)$ telle que $F'(x) = f(x)$.

**Définition 5.1** *On dit que $F(x)+c$ est **l'intégrale indéfinie** de la fonction $f(x)$ si et seulement si $F'(x) = f(x)$ et l'on note alors :*

$$\int f(x)dx = F(x) + c, \text{ où } c \in \mathbb{R} \text{ est appelée } \textbf{constante d'intégration.}$$

*En outre, $F(x)$ est dite une **primitive** de $f(x)$. La différentielle $dx$ indique que $x$ est la variable d'intégration.*

Nous avons toute une famille de fonctions $F(x)+c$ qui sont des intégrales de $f(x)$. En effet, la dérivée d'une constante étant nulle, $c$ peut prendre n'importe quelle valeur.

On peut trouver la valeur de $c$ quand on connaît la valeur de l'intégrale pour une certaine valeur de la variable $x$. Cette spécification s'appelle **condition initiale**.

**Exemple 5.1** *Supposons qu'unefonction $f(x)$ a une intégrale indéfinie $F(x)+c = 2x^2+3x+c$.Cette famille de courbes est représentée sur la figure 5.1.*

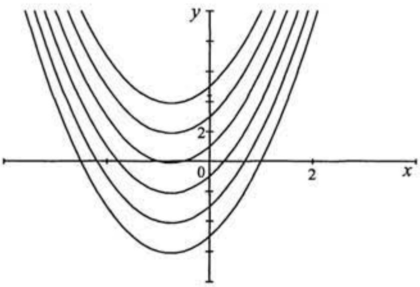



Figure 5.1: Famille de courbes d'équation $y = 2x^2 + 3x + c$

*À chaque courbe correspond un $c$ différent. Supposons comme condition initiale que l'intégrale vaut 5 quand $x$ vaut zéro. Nous avons alors :*

$$2(0)^2 + 3(0) + c = 5$$

*d'où $c = 5$ et l'intégrale avec la condition initiale est alors :*

$$\int f(x)dx = 2x^2 + 3x + 5.$$

*Cette intégrale fait partie de la famille de courbes données par : $2x^2+3x+c$ (Figure 5.1).*

## 5.3 Table d'intégrales

Avant de donner des méthodes d'intégration, nous donnerons une liste d'intégrales indéfinies que l'on peut obtenir directement à partir de la définition 5.1, c'est-à-dire que l'on peut vérifier que la dérivée du second membre est égale à la fonction à intégrer.

1. $\int 1 \cdot dx = \int dx = x + c.$

2. $\int x^\alpha dx = \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c$, avec $\alpha \neq -1$.

3. $\int \dfrac{dx}{x} = \ln \mid x \mid + c.$

4. $\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + c.$

5. $\int e^x dx = e^x + c.$

6. $\int \sin x dx = -\cos x + c.$

7. $\int \cos x dx = \sin x + c.$

8. $\int \sinh x dx = \cosh x + c.$

9. $\int \cosh x dx = \sinh x + c.$

Donnons encore **deux propriétés importantes** de l'intégrale indéfinie (dans ce qui suit, on suppose que les intégrales indéfinies considérées existent):

**1re propriété L'intégrale indéfinie de la somme d'un nombre fini de fonction est égale à la somme de leurs intégrales :**

$$\int [f_1(x)+f_2(x)+\cdots+f_n(x)]dx = \int f_1(x)dx + \int f_2(x)dx + \cdots + \int f_n(x)dx$$

**2ᵉ propriété On peut sortir un facteur constant "du signe $\int$"**, c'est-à-dire si $a$ est une constante, alors :

$$\int af(x)dx = a\int f(x)dx.$$

**Exemple 5.2** *Soit* $\int (7x^2+2)dx$. *À l'aide des deux propriétés ci-dessus et de la table des intégrales indéfinies, nous calculons :*

$$\int (7x^2+2)dx = \int 7x^2dx + \int 2dx = 7\int x^2dx + 2\int dx = 7\cdot\frac{x^3}{3} + 2x + c.$$

**Exemple 5.3** $\displaystyle\int \frac{2dx}{x} = 2\int \frac{dx}{x} = 2\ln \mid x \mid + c.$

**Exemple 5.4** $\displaystyle\int 3e^x dx = 3\int e^x dx = 3e^x + c.$

**Exemple 5.5** $\displaystyle\int (2^x - \sin x)dx = \int 2^x dx - \int \sin x dx = \frac{2^x}{\ln 2} + \cos x + c.$

**Remarque** Rappelons que la dérivée d'une fonction composée $y = f(g(x))$ est donnée par $y' = f'(g(x))\cdot g'(x)$, où $g'(x)$ est parfois appelée dérivée intérieure. Il ne faut pas oublier d'en tenir compte lorsqu'on veut intégrer une telle fonction composée.

**Exemple 5.6** $\displaystyle\int e^{4x}dx = \frac{1}{4}e^{4x} + c$, *puisque la dérivée intérieure de* $e^{4x}$ *est égale à 4.*

**Exemple 5.7** $\displaystyle\int \cos(3x-5)dx = \frac{1}{3}\sin(3x-5) + c.$

De manière plus générale, on a la règle suivante : Si $\int f(x)dx = F(x) + c_1$, alors :

$$\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + c_2, \text{ où } a \neq 0.$$

## 5.4 Intégration par changement de variable

L'intégrale $\int f(x)dx$ peut devenir plus simple à calculer si la variable $x$ est remplacée par une nouvelle variable $t$ telle que $x = \varphi(t)$. Dans ce cas, $dx = \varphi'(t)dt$ et l'égalité suivante est satisfaite :

$$\int f(x)dx = \int f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)dt.$$

Il est parfois préférable de choisir le changement de variable $t = \psi(x)$ au lieu de $x = \varphi(t)$.

**Exemple 5.8** $\int \sin x \cdot \cos x \; dx$. *Effectuons le changement de variable* $t = \sin x$ ; *ainsi,* $dt = \cos x \; dx$ *et par conséquent :*

$$\int \sin x \cdot \cos x \; dx = \int tdt = \frac{t^2}{2} + c = \frac{1}{2}\sin^2 x + c.$$

*Dans cet exemple, l'intégrale à calculer est de la forme :* $\int \psi(x) \cdot \psi'(x)dx$. *En posant* $t = \psi(x)$, *on a :* $dt = \psi'(x)dx$. *D'où :*

$$\int \psi(x) \cdot \psi'(x)dx = \int tdt = \frac{t^2}{2} + c = \frac{1}{2}\psi^2(x) + c.$$

De façon analogue, on obtient la formule générale :

$$\int \psi^n(x) \cdot \psi'(x)dx = \frac{1}{n+1} \cdot \psi^{n+1}(x) + c, \text{ avec } n \neq -1.$$

**Exemple 5.9** $\int (x+3)^6 dx$. *Posons :* $t = x + 3$; $dt = dx$. *D'où :*

$$\int (x+3)^6 dx = \int t^6 dt = \frac{1}{7}t^7 + c = \frac{1}{7}(x+3)^7 + c.$$

**Exemple 5.10** $\int \frac{2x}{x^2+5}dx$. *Posons :* $t = x^2 + 5$; $dt = 2xdx$. *Ainsi :*

$$\int \frac{2x}{x^2+5}dx = \int \frac{dt}{t} = \ln \mid t \mid + c = \ln(x^2+5) + c.$$

Lorsque l'intégrale à calculer est de la forme $\int \frac{\psi'(x)}{\psi(x)}dx$, on pose $t = \psi(x)$ et on obtient la formule :

$$\int \frac{\psi'(x)}{\psi(x)}dx = \int \frac{dt}{t} = \ln \mid t \mid +c = \ln \mid \psi(x) \mid +c.$$

**Exemple 5.11** $\int \frac{dx}{3x+2}$. *Posons :* $t = 3x+2$; $dt = 3dx \Rightarrow dx = \frac{dt}{3}$. *Ainsi :*

$$\int \frac{dx}{3x+2} = \int \frac{dt}{3t} = \frac{1}{3}\int \frac{dt}{t} = \frac{1}{3}\ln \mid t \mid +c = \frac{1}{3}\ln \mid 3x+2 \mid +c.$$

**Exemple 5.12** $\int x^3 \cdot \sqrt{1+x^2}dx$. *Posons :* $t = 1+x^2$; $dt = 2xdx$. *Comme* $t = 1+x^2$, *on a :* $x^2 = t-1$. *Ainsi,* $x^3dx = x^2 \cdot xdx = (t-1)\frac{1}{2}dt$. *D'où :*

$$\begin{aligned}
\int x^3\sqrt{1+x^2}dx &= \int \frac{1}{2}\cdot(t-1)\cdot\sqrt{t}dt \\
&= \int \left(\frac{1}{2}t\cdot\sqrt{t} - \frac{1}{2}\sqrt{t}\right)dt \\
&= \frac{1}{2}\int t^{3/2}dt - \frac{1}{2}\int t^{1/2}dt \\
&= \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{5}\cdot t^{5/2} - \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}t^{3/2} + c \\
&= \frac{1}{5}t^{5/2} - \frac{1}{3}t^{3/2} + c \\
&= \frac{1}{15}t^{3/2}\cdot(3t-5) + c \\
&= \frac{1}{15}(1+x^2)^{3/2}\cdot(3x^2-2) + c.
\end{aligned}$$

## 5.5 Intégration par parties

Lorsqu'une expression à intégrer est formée d'un produit de deux fonctions dont l'une est facile à intégrer, nous pouvons utiliser ce qu'on appelle l'**intégration par parties**. Cette formule se déduit directement de la dérivée d'un

produit :

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}(u \cdot v) &= u \cdot \frac{dv}{dx} + v \cdot \frac{du}{dx} \\ u \cdot \frac{dv}{dx} &= \frac{d}{dx}(u \cdot v) - v \cdot \frac{du}{dx}.\end{aligned}$$

L'intégration des deux membres de l'égalité nous donne :

$$\int u \cdot \frac{dv}{dx} dx = \int \frac{d(u \cdot v)}{dx} dx - \int v \cdot \frac{du}{dx} \cdot dx.$$

D'où la formule d'intégration par parties :

$$\int u dv = u \cdot v - \int v du.$$

Il n'y a malheureusement pas de règles pour séparer une expression en deux parties $u$ et $dv$. D'autre part, il se peut que l'intégration par parties ne fournisse pas une expression plus simple à intégrer ; dans ce cas, une autre méthode doit être utilisée.

On notera finalement que, dans certains cas, la formule d'intégration par parties doit être utilisée plusieurs fois consécutivement.

**Exemple 5.13** *Pour calculer l'intégrale* $\int x \cdot \sin x \; dx$*, on pose :* $u = x$ *et* $dv = \sin x \; dx$*, de telle sorte que* $du = dx$ *et* $v = \int \sin x \; dx = -\cos x$.
*Par la règle d'intégration par parties, nous avons :*

$$\begin{aligned}\int x \sin x dx &= -x \cos x - \int -\cos x \; dx \\ &= -x \cos x + \int \cos x \; dx \\ &= -x \cos x + \sin x + c.\end{aligned}$$

**Exemple 5.14** $\int x^2 \cdot e^x dx$*. Posons :* $u = x^2$ *et* $dv = e^x dx$*. Nous avons alors :* $du = 2x dx$ *et* $v = \int e^x dx = e^x$.
*Ainsi,* $\int x^2 e^x dx = x^2 \cdot e^x - \int 2x e^x dx$.

*À nouveau, nous avons un produit à intégrer. Posons* $u = 2x$ *et* $dv = e^x dx$ *;* $du = 2dx$ *et* $v = e^x$*. D'où :*

$$\begin{aligned}\int x^2 e^x dx &= x^2 e^x - [2xe^x - \int 2e^x dx] \\ &= x^2 e^x - 2xe^x + 2\int e^x dx \\ &= x^2 e^x - 2xe^x + 2e^x + c \\ &= e^x(x^2 - 2x + 2) + c.\end{aligned}$$

## 5.6 Applications économiques des intégrales indéfinies

Nous avons vu précédemment que la variation marginale peut être obtenue en dérivant une fonction. Par conséquent, cette fonction est l'intégrale de la variation marginale. Nous allons voir cette application de l'intégration pour le coût et pour le revenu.

- **Le coût**

  Si le coût total de production $y$ pour produire $x$ unités est fourni par la fonction $y = f(x)$, alors le coût moyen par unité est :

  $$\frac{y}{x} = \frac{f(x)}{x}$$

  et le coût marginal est :

  $$y' = \frac{dy}{dx} = f'(x).$$

  C'est-à-dire que le coût marginal est la dérivée par rapport à $x$ de la fonction du coût total $y = f(x)$. Donc le coût total est l'intégrale par rapport à $x$ de la fonction du coût marginal $f'(x)$ :

  $$\int f'(x)dx = f(x) + c.$$

  Pour obtenir une fonction du coût total unique en intégrant la fonction du coût marginal correspondante, il faut remplir une condition initiale. Fréquemment, il s'agit du coût fixe, c'est-à-dire le coût quand $x = 0$.

**Exemple 5.15** *Le coût marginal* $y'$ *est donné par* $y' = 1.64 - 0.05x$. *Trouvons les fonctions du coût total et du coût moyen quand le coût fixe est égal à* 10.3.

$$y = \int (1.64 - 0.05x)dx = 1.64x - 0.025x^2 + c.$$

*Si* $x = 0$, $y = 1.64 \cdot 0 - 0.025 \cdot 0^2 + c = 10.3$. *Par conséquent,* $c = 10.3$ *et la fonction du coût total est :*

$$y = 10.3 + 1.64x - 0.025x^2.$$

*Celle du coût moyen est égale au coût total divisé par la quantité* $x$ *:*

$$\frac{y}{x} = \frac{10.3}{x} + 1.64 - 0.025x.$$

- **Le revenu**

  Pour n'importe quelle fonction de demande $y = f(x)$ où $y$ est le prix par unité et $x$ le nombre d'unités, le revenu total R est le produit de $x$ par $y$, c'est-à-dire :

  $$\mathrm{R} = x \cdot y = x \cdot f(x).$$

  Le revenu marginal par rapport à la demande est la dérivée par rapport à $x$ du revenu total :

  $$\frac{d\mathrm{R}}{dx} = \mathrm{R}'(x).$$

  Par conséquent, la fonction du revenu total est l'intégrale par rapport à $x$ de la fonction du revenu marginal, et puisque :

  $$\int \mathrm{R}'(x)dx = \mathrm{R}(x) + c,$$

  il faut donner une condition initiale pour obtenir une fonction du revenu total unique en intégrant la fonction du revenu marginal correspondante. La condition initiale stipulant que le revenu est nul quand la demande est nulle peut être utilisée pour évaluer la constante d'intégration.

  Notons que le revenu moyen ou revenu par unité est le prix par unité $y$ et de ce fait la courbe du revenu moyen et la courbe de demande sont identiques.

**Exemple 5.16** *La fonction du revenu marginal est* $R'(x) = 4 - 4x + 6x^2$. *Déterminons les fonctions du revenu total et de demande :*

$$R(x) = \int (4 - 4x + 6x^2)dx = 4x - 2x^2 + 2x^3 + c.$$

*Si* $x = 0$, $R(0) = 4 \cdot 0 - 2 \cdot 0^2 + 2 \cdot 0^3 + c = 0$ , *d'où* $c = 0$. *Le revenu total est donc :*

$$R(x) = 4x - 2x^2 + 2x^3 \text{ et la demande : } y = \frac{R}{x} = 4 - 2x + 2x^2.$$

## 5.7 Intégrale définie

Nous allons voir maintenant comment calculer l'aire A de la surface comprise entre la courbe $y = f(x)$, l'axe des $x$ et les droites $x = a$ et $x = b$ (pour autant que $f$ soit définie sur $[a; b]$ ) (Figure 5.2).

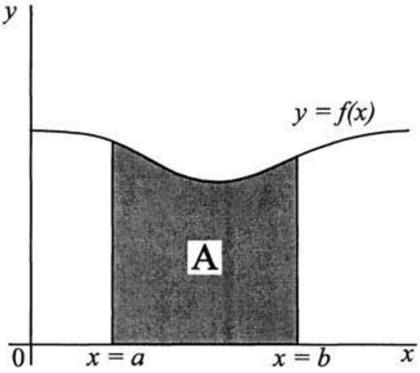



Figure 5.2: Aire sous une courbe $y = f(x)$

Pour cela, nous ferons les hypothèses suivantes :

1° Soit $y = f(x)$ une fonction continue sur l'intervalle $[a; b]$.

2° Soit $f(x) \geq 0$, $\forall x \in [a; b]$.

3° Effectuons une subdivision de l'intervalle $[a; b]$ en $n$ parties en choisissant $(n+1)$ points $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}$ tels que : $a = x_1 < x_2 < \ldots < x_i < x_{i+1} < \ldots < x_{n+1} = b$ (Figure 5.3).

4° Soit $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

5° Soit $\Delta x$ la valeur maximale des $\Delta x_i$ pour $1 \leq i \leq n$.

Les $(n+1)$ points choisis divisent l'intervalle $[a\,; b]$ en $n$ parties de longueur $\Delta x_i$; nous pouvons ainsi former des rectangles dont la base est la largeur $\Delta x_i$ et la hauteur est la valeur $f(x_i)$ (Figure 5.3).

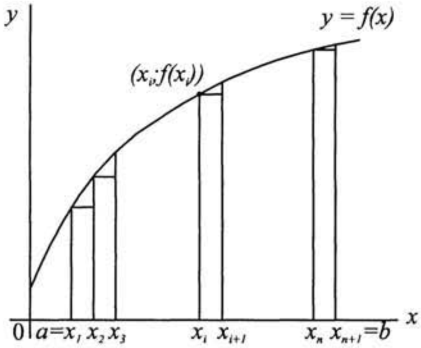



Figure 5.3: Subdivision de l'intervalle $[a; b]$

L'aire de ces rectangles est respectivement égale à :

$$\Delta x_1 \cdot f(x_1), \;\; \Delta x_2 \cdot f(x_2), \ldots, \;\; \Delta x_n \cdot f(x_n)$$

et leur somme est :

$$\sum_{i=1}^{n} \Delta x_i \cdot f(x_i).$$

Ainsi, l'aire cherchée est approximée par :

$$\mathrm{A} \cong \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i \cdot f(x_i).$$

En augmentant le nombre de rectangles, l'aire se trouvant entre la courbe et les rectangles va diminuer. Si l'on veut calculer l'aire exacte, il faut calculer la limite de cette somme lorsque $n$ tend vers l'infini et $\Delta x$ tend vers zéro.

L'aire A limitée par la courbe $y = f(x)$, l'axe des $x$ et les deux droites $x = a$ et $x = b$ est définie comme étant cette limite :

$$\mathrm{A} = \lim_{n\to\infty, \Delta x\to 0} \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i \cdot f(x_i)$$

que l'on note $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ (lire "intégrale de $a$ à $b$ de $f(x)dx$") et que l'on appelle **intégrale définie** ; $a$ et $b$ sont appelés les bornes d'intégration.

Nous énonçons à présent l'un des théorèmes les plus importants du calcul intégral.

**Théorème 5.1** ***(Théorème fondamental du calcul intégral)*** *Si $f(x)$ est continue sur l'intervalle fermé $[a; b]$ et si $F(x)$ est une primitive de $f(x)$, alors :*

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

Expliquons ce résultat géométriquement en considérant l'aire limitée par la courbe $y = f(x)$, l'axe des $x$, une abscisse fixée en $x = a$ et une abscisse mobile en $x = b$. Notons cette aire $abgh$ par A (Figure 5.4).
Quand $x = b$ s'accroît de $\Delta x$, A s'accroît de $\Delta\mathrm{A}$ = aire $bceg$. Nous voyons que :

$$\begin{aligned} \text{aire } bcdg < {} & \text{ aire } bceg && < \text{aire } bcef \\ bg \cdot \Delta x < {} & \quad \Delta\mathrm{A} && < ce \cdot \Delta x \\ bg < {} & \ \Delta\mathrm{A}/\Delta x && < ce. \end{aligned}$$

Lorsque nous faisons tendre $\Delta x$ vers zéro, $ce$ va tendre vers $bg$ qui reste fixe et nous avons :

$$\lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta A}{\Delta x} = \frac{dA}{dx} = bg = y = f(x).$$

Nous pouvons écrire cette limite comme suit :

$$dA = f(x)dx.$$

Notons par $F(x) + c$ l'intégrale de $f(x)dx$ ; d'où par intégration :

$$\mathrm{A} = F(x) + c.$$

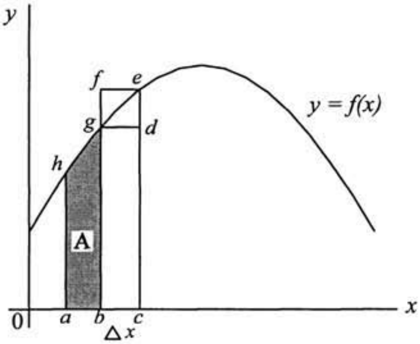



Figure 5.4: A = aire $abgh = \int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$

On trouve la constante d'intégration $c$ en remarquant que pour $x = a$, $A = 0$. Nous avons alors :

$$\begin{aligned} \mathrm{A} &= F(a) + c = 0 \\ \Rightarrow c &= -F(a). \end{aligned}$$

Par conséquent, on obtient :

$$\mathrm{A} = F(x) - F(a).$$

L'aire $abgh$ de la figure 5.4, où $x = b$, est donc égale à :

$$\mathrm{A} = F(b) - F(a)$$

et on la note :

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

La constante d'intégration disparaît et l'intégrale a une valeur finie. C'est pourquoi l'on parle d'**intégrale définie**.

**Exemple 5.17** *Calculons l'intégrale définie* $\int_0^3 x^2 dx$. *Tout d'abord, il faut trouver* $F(x)$ *:*

$$F(x) = \frac{x^3}{3}.$$

*Ensuite, nous remplaçons dans $A = F(b) - F(a)$ avec $b = 3$ et $a = 0$ :*

$$A = \frac{3^3}{3} - \frac{0^3}{3} = 9.$$

*Cela signifie que l'aire comprise entre $y = x^2$, l'axe des $x$, $x = 0$ et $x = 3$ est égale à 9 (Figure 5.5).*

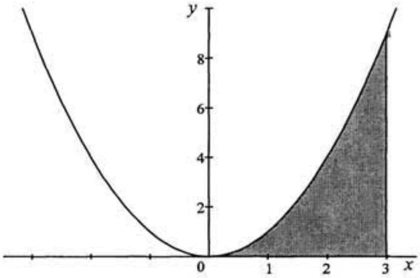



Figure 5.5: $\int_0^3 x^2 dx = 9$

- **Interprétation d'une aire négative**

  Dans la définition d'une aire par $\mathrm{A} = \int_a^b f(x)dx$, on a supposé que $f(x)$ est une fonction positive continue entre $a$ et $b$. Si $f(x)$ est négative entre $a$ et $b$, c'est-à-dire si la courbe $y = f(x)$ se situe au-dessous de l'axe des $x$ entre $a$ et $b$, alors la valeur de l'intégrale

  $$\mathrm{A} = \int_a^b f(x)dx$$

  est négative. De telles aires sont appelées des **aires négatives**. Lorsque l'on calcule $A = \displaystyle\int_a^b f(x)dx$ sans tenir compte du fait que la courbe $y = f(x)$ se situe au-dessus ou au-dessous de l'axe des $x$, on parle d'**aire orientée**. Il se peut que cette aire soit nulle comme le montre l'exemple suivant.

**Exemple 5.18** $\displaystyle\int_0^{4\pi} \sin x dx = -\cos x\Big|_0^{4\pi} = -\cos 4\pi - (-\cos 0) = 0.$

*Dans ce cas, la somme des aires positives compense exactement la somme des aires négatives (Figure 5.6).*

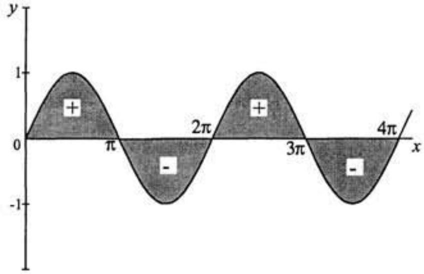



Figure 5.6: $\int_0^{4\pi} \sin x dx = 0$ en tant qu'aire orientée

En revanche, si l'on veut calculer l'**aire totale** absolue entre une courbe et l'axe de $x$ pour un intervalle $[a; b]$, on utilisera la formule :

$$\text{Aire totale} = \sum \text{(aires positives)} - \sum \text{(aires négatives)}.$$

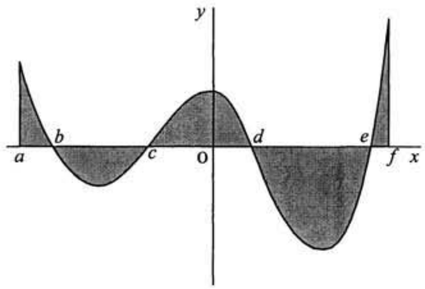



Figure 5.7: Aire totale $= \int_a^b - \int_b^c + \int_c^d - \int_d^e + \int_e^f$

Par conséquent, si l'aire que l'on doit calculer se situe à la fois au-dessous et au-dessus de l'axe des $x$, il faut décomposer l'intégrale en utilisant la propriété 5 et la définition de l'aire totale donnée ci-dessus (Figure 5.7).

**Exemple 5.19** *L'aire se situant entre $f(x) = x^2 - 4x$, l'axe des $x$, $x = 0$ et $x = 2$ est donnée par :*

$$\int_0^2 (x^2 - 4x)dx = \left(\frac{x^3}{3} - 2x^2\right)\Big|_0^2$$

$$\begin{aligned} &= \frac{2^3}{3} - 2 \cdot 2^2 - \left(\frac{0^3}{3} - 2 \cdot 0^2\right) \\ &= \frac{8}{3} - 8 = -\frac{16}{3}. \end{aligned}$$

*Comme l'aire se situe au-dessous de l'axe des $x$ (Figure 5.8), l'aire totale s'obtient en changeant de signe :*

$$\textit{Aire totale} = -\textit{aire négative} = \frac{16}{3}.$$

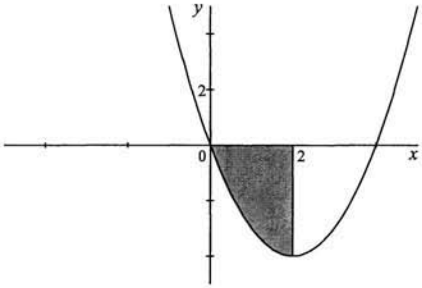



Figure 5.8: $\displaystyle\int_0^2 (x^2 - 4x)dx = -\frac{16}{3}$

**Exemple 5.20** *L'aire qui se situe entre $f(x) = -x^3 + x^2 + 5x$, l'axe des $x$, $x = -1$ et $x = 1$ est représentée dans la figure 5.9.*

*Pour trouver l'aire totale, il faut donc décomposer l'intégrale $\displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)dx$ de la manière suivante :*

$$-\int_{-1}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{1} f(x)dx$$

$$\begin{aligned} \textit{où } -\int_{-1}^{0} f(x)dx &= -\int_{-1}^{0} (-x^3 + x^2 + 5x)dx \\ &= -\left(-\frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} + \frac{5x^2}{2}\right)\Bigg|_{-1}^{0} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\left(-\frac{0^4}{4}+\frac{0^3}{3}+5\cdot\frac{0^2}{2}\right)\\
&\quad+\left(-\frac{(-1^4)}{4}+\frac{(-1^3)}{3}+5\cdot\frac{(-1^2)}{2}\right)\\
&= 0+\left(-\frac{1}{4}-\frac{1}{3}+\frac{5}{2}\right)\\
&= \frac{(-3-4+30)}{12}=\frac{23}{12}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\textit{et } \int_0^1 f(x)dx &= \int_0^1 (-x^3+x^2+5x)dx\\
&= \left(-\frac{x^4}{4}+\frac{x^3}{3}+\frac{5x^2}{2}\right)\Bigg|_0^1\\
&= -\frac{1}{4}+\frac{1}{3}+\frac{5}{2}-\left(-\frac{(-0)^4}{4}+\frac{0^3}{3}+5\cdot\frac{0^2}{2}\right)\\
&= \frac{(-3+4+30)}{12}=\frac{31}{12}.
\end{aligned}$$

*L'aire totale vaut donc:* $\frac{23}{12}+\frac{31}{12}=\frac{54}{12}=\frac{9}{2}$.

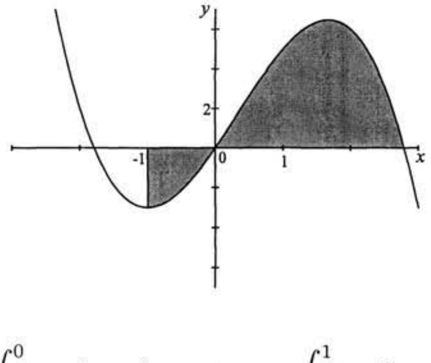



Figure 5.9: $-\int_{-1}^{0}(-x^3+x^2+5x)dx+\int_0^1(-x^3+x^2+5x)dx=\frac{9}{2}$

- **Propriétés des intégrales définies**

  Soit deux fonctions $f(x)$ et $g(x)$ continues sur l'intervalle $[a;b]$. Nous avons les propriétés suivantes :

1. $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx.$
2. $\displaystyle\int_a^a f(x)dx = 0.$
3. $\displaystyle\int_a^b cf(x)dx = c\int_a^b f(x)dx$, où $c$ est une constante.
4. $\displaystyle\int_a^b (f(x) \pm g(x))dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx.$
5. $\displaystyle\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx$, avec $a \leq b \leq c$.

**Exemple 5.21** *Appliquons la propriété 1 à* $\displaystyle\int_1^4 (2x+5)dx$ *:*

$$\begin{aligned} \int_1^4 (2x+5)dx &= \left(x^2+5x\right)\Big|_1^4 \\ &= 4^2+5\cdot 4-(1^2+5\cdot 1) \\ &= 36-6 \\ &= 30. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_4^1 (2x+5)dx &= \left(x^2+5x\right)\Big|_4^1 \\ &= 1^2+5\cdot 1-(4^2+5\cdot 4) \\ &= 6-36 \\ &= -30. \end{aligned}$$

**Exemple 5.22** *Appliquons la propriété 2 à* $\displaystyle\int_1^1 (6x^2+1)dx$ *:*

$$\begin{aligned} \int_1^1 (6x^2+1)dx &= \left(2x^3+x\right)\Big|_1^1 \\ &= 2\cdot 1^3+1-(2\cdot 1^3+1) \\ &= 3-3 \\ &= 0. \end{aligned}$$

**Exemple 5.23** *Appliquons la propriété 5 à* $\int_1^3 4dx$ *:*

$$\begin{aligned}\int_1^3 4dx &= \int_1^2 4dx + \int_2^3 4dx \\ \int_1^3 4dx &= 4x\,|_1^3 \\ &= 4\cdot 3-(4\cdot 1) \\ &= 12-4 \\ &= 8.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_1^2 4dx + \int_2^3 4dx &= 4x\,|_1^2 \ + \ 4x\,|_2^3 \\ &= 4\cdot 2-(4\cdot 1)+4\cdot 3-(4\cdot 2) \\ &= 8-4+12-8 \\ &= 8.\end{aligned}$$

- **Aire entre deux courbes**

  Si l'aire totale que l'on doit calculer ne se situe pas entre une courbe $f(x)$ et l'axe des $x$, mais entre une courbe $f(x)$ et une autre courbe $g(x)$ (toujours entre $x=a$ et $x=b$), on obtient cette aire de la façon suivante, en supposant $f(x)\leq g(x)$ :

  $$\mathrm{A} = \int_a^b [g(x)-f(x)]dx \text{ avec } a\leq x\leq b.$$

  **Remarque** Comme, par hypothèse, $f(x)\leq g(x)$, il n'est plus nécessaire de tenir compte des aires négatives.

**Exemple 5.24** *Trouvons l'aire qui se situe entre* $f(x)=x^3$ *et* $g(x)=x$ *(Figure 5.10).*
*Nous cherchons tout d'abord les points d'intersection :*

$$\begin{aligned}x^3 &= x \\ x^3-x &= 0 \\ x(x^2-1) &= 0 \\ x\cdot(x+1)(x-1) &= 0.\end{aligned}$$

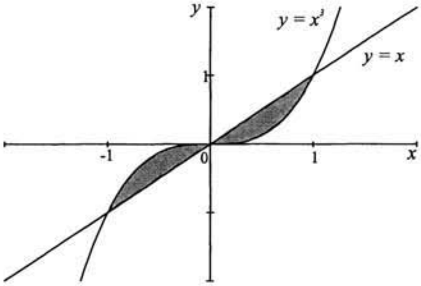



Figure 5.10: $\int_{-1}^{0}(x^3 - x)dx + \int_{0}^{1}(x - x^3)dx = \frac{1}{2}$

*Les solutions de cette équation sont :*

$$\begin{aligned} x &= -1 \\ x &= 0 \\ x &= 1. \end{aligned}$$

*Nous remarquons qu'entre* $-1$ *et* $0$*, c'est* $g(x)$ *qui est inférieure à* $f(x)$ *tandis qu'entre* $0$ *et* $1$*, c'est* $f(x)$ *qui est inférieure à* $g(x)$*. Par conséquent, nous devons décomposer l'intégrale en deux intégrales :*

$$\int_{-1}^{0}[f(x) - g(x)]dx \;\; et \;\; \int_{0}^{1}[g(x) - f(x)]dx.$$

*Nous avons alors :*

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{0}(x^3 - x)dx &= \left(\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2}\right)\Big|_{-1}^{0} \\ &= -\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\right) \\ &= \frac{1}{4} \\ \int_{0}^{1}(x - x^3)dx &= \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4}\right)\Big|_{0}^{1} \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{4} \\ &= \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

*L'aire totale est égale à :* $\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$.

## 5.8 Intégrales impropres

L'objectif de ce paragraphe est de calculer $\int_a^b f(x)dx$, où $f$ est une fonction continue sur l'intervalle $[a;b[$ (c'est-à-dire que $f$ n'est pas définie en $b$) ou sur l'intervalle $]a;b]$ (c'est-à-dire que $f$ n'est pas définie en $a$).

**Exemple 5.25** $\int_1^\infty \frac{1}{x^2}dx$ *où* $f(x)=\frac{1}{x^2}$ *est continue sur* $[1;\infty[$.

**Exemple 5.26** $\int_0^1 \ln(x)\,dx$ *où* $f(x)=\ln(x)$ *est continue sur* $]0;1]$.

Si $f(x)$ est continue sur $[a;b[$, alors $f$ est continue sur $[a;x_0]$ pour $x_0<b$. Dès lors, l'intégrale $\int_a^b f(x)dx$ se calcule en deux étapes :

1. Calculer $\int_a^{x_0} f(x)dx=\Phi(x_0)$.

2. Prendre la limite lorsque $x_0$ tend vers $b$ : $\lim\limits_{x_0\to b}\Phi(x_0) = \int_a^b f(x)dx$ .

Nous avons donc, si la limite existe : $\lim\limits_{x_0\to b}\int_a^{x_0} f(x)dx = \int_a^b f(x)dx$ .

De même, si $f(x)$ est continue sur $]a;b]$, nous avons, si la limite existe : $\lim\limits_{x_0\to a}\int_{x_0}^b f(x)dx = \int_a^b f(x)dx$ .

**Exemple 5.27** *Calculons* $\int_1^\infty \frac{1}{x^2}dx$, $f(x)=\frac{1}{x^2}$ *est continue sur* $[1;\infty[$.

*1.* $\Phi(x_0)=\int_1^{x_0}\frac{1}{x^2}dx=(-\frac{1}{x})\Big|_1^{x_0}=-\frac{1}{x_0}-(-1)=1-\frac{1}{x_0}$.

*2.* $\lim\limits_{x_0\to\infty}\Phi(x_0)=\lim\limits_{x_0\to\infty}\left(1-\frac{1}{x_0}\right)=1-\lim\limits_{x_0\to\infty}\left(\frac{1}{x_0}\right)=1-0=1.$

*Ainsi,* $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx = 1.$

**Exemple 5.28** *Calculons* $\int_0^1 \ln(x)\, dx$, $f(x) = \ln(x)$ *est continue sur* $]0;1]$
*Une primitive de* $\ln(x)$ *est* $F(x) = x\ln(x) - x$ *(voir exercice 2 (a) du même chapitre).*

1. $$\Phi(x_0) = \int_{x_0}^1 \ln(x)\, dx = (x\ln(x) - x)\big|_{x_0}^1 = -1 - (x_0 \ln(x_0) - x_0)$$
$$= -x_0 \ln(x_0) + x_0 - 1.$$

2. $$\lim_{x_0 \to 0} \Phi(x_0) = \lim_{x_0 \to 0} (-x_0 \ln(x_0) + x_0 - 1)$$
$$= -1 - \lim_{x_0 \to 0} (x_0 \ln(x_0)) + \lim_{x_0 \to 0} x_0 = -1 - 0 + 0 = -1.$$

*Ainsi,* $\int_0^1 \ln(x)\, dx = -1.$

## 5.9 Applications économiques des intégrales définies

L'intégrale définie a de nombreuses applications en économie. Les concepts d'excédent du consommateur et d'excédent du producteur en sont deux exemples. Nous allons en discuter dans ce paragraphe, puis nous traiterons du profit total.

- **Excédent du consommateur**

  Une fonction de demande représente les quantités d'un produit qui pourraient être achetées à différents prix. Si le prix du marché est $y_0$ et la demande du marché correspondante est $x_0$, les consommateurs qui seraient d'accord de payer plus que le prix du marché y gagnent du fait que le prix est seulement $y_0$ (Figure 5.11). Sous certaines hypothèses économiques, le gain total du consommateur est représenté par l'aire qui se situe sous la courbe de demande et au-dessus de la droite $y = y_0$. Cette aire est désignée par Marshall comme "l'excédent du consommateur" et est évaluée comme suit :

– excédent du consommateur $= \int_0^{x_0} f(x)dx - x_0 \cdot y_0$
où la fonction de demande est $y = f(x)$, ou d'une manière analogue

– excédent du consommateur $= \int_{y_0}^{m_0} g(y)dy$
où la fonction de demande est $x = g(y)$ et $m_0$ est la valeur de $y$ quand $x = 0$, c'est-à-dire que $m_0$ est l'intersection de la fonction de demande avec l'axe des $y$. Par conséquent :
excédent du consommateur $= \int_0^{x_0} f(x)dx - x_0 \cdot y_0 = \int_{y_0}^{m_0} g(y)dy.$

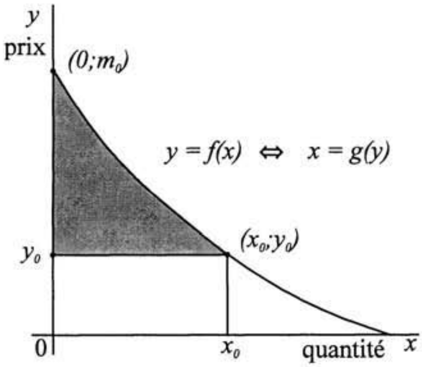



Figure 5.11: Excédent du consommateur

**Exemple 5.29** *Si la fonction de demande est $y = 24 - 2x - x^2$, nous allons trouver l'excédent du consommateur :*

*(a) si $x_0 = 3$ (Figure 5.12(a))*
*Ainsi :* $y_0 = 24 - 2 \cdot 3 - 3^2 = 9.$

$$\begin{aligned} \textit{excédent du consommateur} &= \int_0^{x_0} f(x)dx - x_0 \cdot y_0 \\ &= \int_0^3 (24 - 2x - x^2)dx - 3 \cdot 9 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \left(24x - x^2 - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^3 - 27 \\ &= (72 - 9 - 9) - 0 - 27 \\ &= 27. \end{aligned}$$

(b) *si* $y_0 = 21$ *(Figure 5.12(b))*
*Ainsi,* $x_0$ *est trouvé par* $21 = 24 - 2x - x^2$. *De là, nous avons* $x^2 + 2x - 3 = 0$, *d'où* $x = (-2 \pm \sqrt{4+12})/2 = (-2 \pm 4)/2 = 1$ *et* $-3$. *Comme une quantité ne peut pas être négative,* $x_0 = 1$.

$$\begin{aligned} \textit{excédent du consommateur} &= \int_0^{x_0} f(x)dx - x_0 \cdot y_0 \\ &= \int_0^1 (24 - 2x - x^2)dx - 1 \cdot 21 \\ &= \left(24x - x^2 - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^1 - 21 \\ &= \frac{5}{3}. \end{aligned}$$

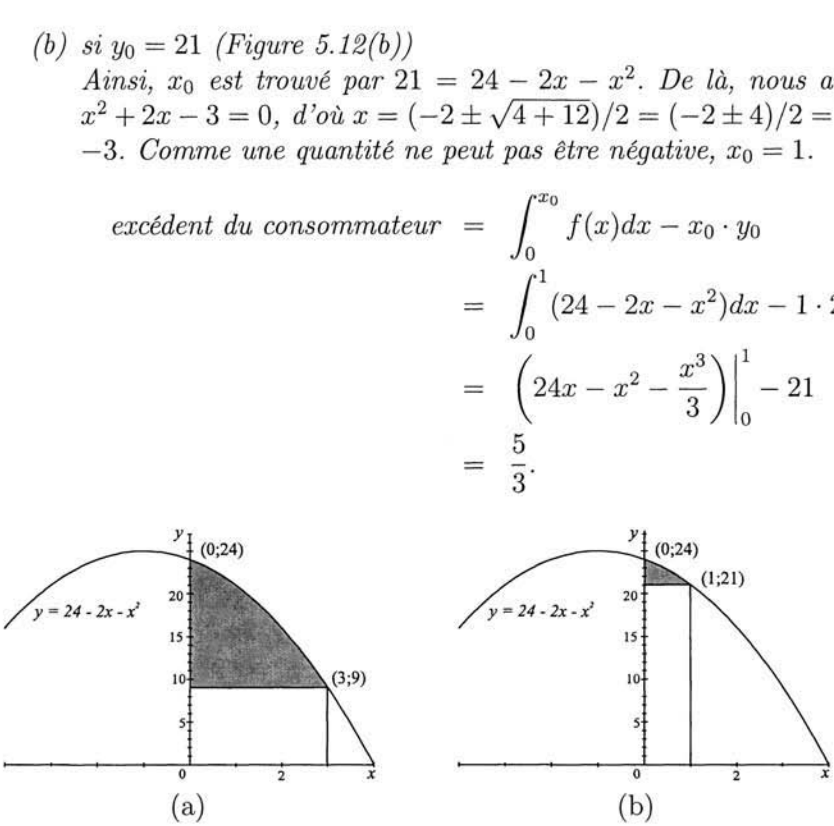



Figure 5.12: Excédent du consommateur (a) si $x_0 = 3$ (b) si $y_0 = 21$

- **Excédent du producteur**

Une fonction d'offre représente les quantités respectives d'un produit qui pourraient être offertes à différents prix. Si le prix du marché est $y_0$ et l'offre du marché correspondante est $x_0$, les producteurs qui seraient d'accord d'offrir le produit au-dessous du prix du marché y gagnent du

fait que le prix est $y_0$. Sous certaines hypothèses économiques, le gain total pour le producteur est représenté par l'aire qui se situe au-dessus de la courbe d'offre et au-dessous de la droite $y = y_0$ et il est connu sous le nom d'excédent du producteur (Figure 5.13). Cette aire est évaluée par :

- excédent du producteur $= x_0 \cdot y_0 - \int_0^{x_0} f(x)dx$.
  où la fonction d'offre est $y = f(x)$

ou encore par :

- excédent du producteur $= \int_{M_0}^{y_0} g(y)dy$
  où la fonction d'offre est $x = g(y)$ et $M_0$ est la valeur de $y$ quand $x = 0$, c'est-à-dire que $M_0$ est l'intersection de la fonction d'offre avec l'axe des $y$.

Nous avons donc :
excédent du producteur $= x_0 \cdot y_0 - \int_0^{x_0} f(x)dx = \int_{M0}^{y_0} g(y)dy.$




Figure 5.13: Excédent du producteur

**Exemple 5.30** *Si l'offre est $y = (x+2)^2$ et le prix est $y_0 = 25$, nous allons trouver l'excédent du producteur en utilisant deux méthodes différentes (Figure 5.14).*

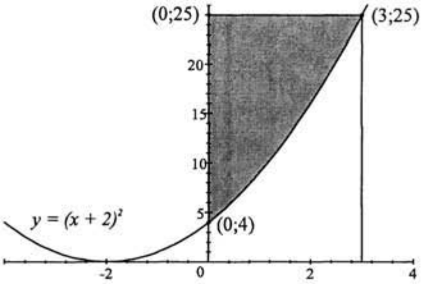



Figure 5.14: Excédent du producteur si $y_0 = 25$

***Remarque*** *$x_0$ se trouve comme suit: $25 = (x+2)^2$, ce qui nous donne $x^2 + 4x - 21 = 0$.*
*De là, nous avons $x = (-4 \pm \sqrt{16+84})/2 = (-4 \pm 10)/2 = -7$ et $3$. Comme une quantité ne peut pas être négative, $x_0 = 3$. Ainsi:*

$$\begin{aligned}
\textit{a) excédent du producteur} &= x_0 \cdot y_0 - \int_0^{x_0} f(x)dx \\
&= 3 \cdot 25 - \int_0^3 (x+2)^2 dx \\
&= 75 - \left. \frac{(x+2)^3}{3} \right|_0^3 \\
&= 75 - \left( \frac{125}{3} - \frac{8}{3} \right) \\
&= 36.
\end{aligned}$$

***Remarque*** *On trouve $g(y)$ en inversant $y = (x+2)^2$ : $\sqrt{y} = x+2$ et $\sqrt{y} - 2 = x$. Quant à $M_0$, on le trouve en posant $x = 0$ dans $y = (x+2)^2$, ce qui donne $M_0 = 4$. Ainsi:*

$$\begin{aligned}
\textit{b) excédent du producteur} &= \int_{M_0}^{y_0} g(y)dy \\
&= \int_4^{25} (y^{1/2} - 2)dy \\
&= \left. \left( \frac{2y^{3/2}}{3} - 2y \right) \right|_4^{25}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \left(\frac{250}{3} - 50\right) - \left(\frac{16}{3} - 8\right) \\ &= 36. \end{aligned}$$

- **Profit total**

  L'intégrale peut être utilisée pour déterminer le profit total ou le bénéfice net total dans différents contextes. En général, le profit est maximum (en concurrence parfaite) quand le **revenu marginal** est égal au **coût marginal**. Le profit total est l'intégrale du revenu marginal moins le coût marginal de la quantité zéro à la quantité pour laquelle le profit est maximum.

**Exemple 5.31** *Nous allons trouver la quantité qui maximise le profit et le profit total en ce point, si les fonctions de revenu marginal et de coût marginal sont données par :*

$$RMa = 25 - 5x - 2x^2.$$

$$CMa = 15 - 2x - x^2.$$

*Ces fonctions sont représentées sur la figure 5.15. Si $RMa = CMa$, on a :*

$$\begin{aligned} 25 - 5x - 2x^2 &= 15 - 2x - x^2 \\ 25 - 5x - 2x^2 - 15 + 2x + x^2 &= 0 \\ 10 - 3x - x^2 &= 0 \\ (5 + x)(2 - x) &= 0 \end{aligned}$$

*avec comme solutions :*

$$x_1 = -5 \text{ et } x_2 = 2.$$

*Seul $x_2$ a un sens économiquement parlant.*
*La première dérivée de $(RMa - CMa)$ est la seconde dérivée du profit total $(PT)$ et son signe nous indique si le profit est un maximum ou un minimum pour une valeur particulière de $x$.*

$$\frac{d}{dx}(RMa - CMa) = \frac{d^2PT}{dx^2} = -3 - 2x$$

$$\text{et avec } x = 2, \quad \frac{d^2PT}{dx^2} = -7$$

*le profit est bien un maximum pour $x = 2$.*

$$\begin{aligned} \textit{profit total} &= \int_0^2 (RMa - CMa)dx \\ &= \int_0^2 (10 - 3x - x^2)dx \\ &= \left(10x - \frac{3x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^2 \\ &= \left(20 - 6 - \frac{8}{3}\right) - 0 \\ &= \frac{34}{3}. \end{aligned}$$

*L'aire hachurée sur la figure 5.15 représente le profit total calculé ci-dessus.*

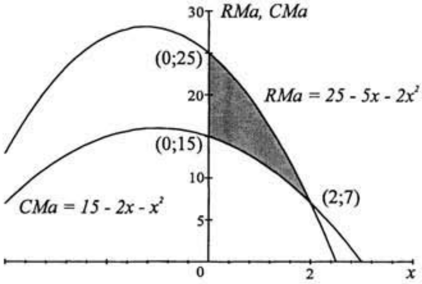



Figure 5.15: Profit total $= \int_0^2 (RMa - CMa)dx = \dfrac{34}{3}$

# Exercices

1. Calculer les intégrales indéfinies suivantes :

   (a) $\int \sin 2x \, dx$.

   (b) $\int \sin x \cdot \cos x \, dx$.

   (c) $\int (x^2 + x - 5)e^x dx$.

   (d) $\int \frac{3 + \ln x}{x} dx$.

   (e) $\int x \cdot e^{ax} dx$.

   (f) $\int \frac{dx}{3x + 1}$.

2. Calculer, par parties, les intégrales indéfinies suivantes :

   (a) $\int \ln x \, dx$.

   (b) $\int x \cdot \ln x \, dx$.

   (c) $\int x^2 \cdot \sin x \, dx$.

   (d) $\int \sin^2 x \, dx$.

3. Connaissant le coût marginal d'une unité produite $x$ :

$$CMa = -4x^2 + 50x + 3.$$

   Trouver le coût total et le coût moyen si les coûts fixes sont de 60.

4. Si le revenu marginal est $RMa = x^2 - 6x + 10$, déterminer le revenu total et la fonction de demande.

5. En tout point d'une certaine courbe, on a $y'' = x + 5$.
   Trouver l'équation de cette courbe sachant qu'elle passe par le point $(1; 2)$ et, qu'en ce point, elle est tangente à la droite $x + y = 3$.

6. Calculer les intégrales définies suivantes :

   (a) $\displaystyle\int_0^4 \frac{2x}{1+x^2}dx.$

   (b) $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \tan x \; dx.$

   (c) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^2+3}{x+2}dx.$

   (d) $\displaystyle\int_1^e \frac{k^2}{x}dx.$

   (e) $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{1}{x^2}dx.$ (constatation ! ).

7. Quelle doit être la valeur de $a$ pour que l'aire comprise entre la parabole $y = x^2$ et la droite $y = ax$ soit égale à 2 ? Faire une esquisse de la situation.

   **Note** Choisir $a > 0$.

8. Si la fonction de demande est $y = 8 - x$ et $x_0 = 4$, trouver l'excédent du consommateur en utilisant deux méthodes différentes.

9. La quantité et le prix correspondants, en concurrence parfaite, sont déterminés par les fonctions de demande et d'offre $y = 14 - x^2$ et $y = 2 + x$ respectivement. Déterminer l'excédent du producteur correspondant.

10. Déterminer l'aire comprise entre la parabole $y = x^2 + 2$ et la droite $y = 2x + 5$.

11. Calculer les intégrales indéfinies suivantes, par changement de variables :

    (a) $\displaystyle\int 3x\sqrt{1-2x^2}dx.$

(b) $\displaystyle\int \frac{x+3}{(x^2+6x)^{1/3}}dx.$

(c) $\displaystyle\int \frac{1}{2x-4}dx.$

(d) $\displaystyle\int (e^x+1)e^x dx.$

(e) $\displaystyle\int \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}dx.$

(f) $\displaystyle\int \frac{(e^x-2)e^x}{e^x+1}dx.$

(g) $\displaystyle\int \frac{x^3}{\sqrt{1+x^2}}dx.$

12. Calculer les intégrales suivantes :

(a) $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} e^x dx.$

(b) $\displaystyle\int_{1}^{\infty} \frac{1}{x}dx.$

(c) $\displaystyle\int_{1}^{\infty} \frac{1}{x^2}dx.$



## NEWTON Isaac Sir (1643-1727)

Après des études à Cambridge, Newton est élu, en 1669, professeur de mathématiques et devient membre de la Royal Society en 1672. Ses recherches portent, essentiellement, d'abord sur le domaine de l'optique. En 1787, il publie son fameux *Principes*, dans lequel il formule les trois lois du mouvement, dérivées de sa loi de gravitation universelle, et présente un système de mécanique capable de préciser et d'évaluer les mouvements de tous les corps célestes ou terrestres. Cet ouvrage est considéré comme le plus grand livre scientifique jamais écrit. En 1693, Newton se retire de la recherche et occupe un poste au Gouvernement. En 1703, il est élu président de la Royal Society, charge qu'il conserve jusqu'à sa mort en 1727. Sir Isaac Newton a changé le cours de l'histoire scientifique. Ses découvertes et ses théories sont les fondements de tous les progrès scientifiques qui suivirent. Sa théorie du calcul différentiel et intégral, la résolution des mystères de la lumière, la découverte du théorème binomial sont d'autres de ses contributions importantes. Oeuvres majeures : *Principes Mathématiques de la Philosophie Naturelle* (1687), *Optique* (1704).

# Chapitre 6

# Les séries

## 6.1 Introduction

Dans le chapitre 3, nous avons étudié la notion de suite. Nous allons maintenant nous intéresser à la **somme des termes** d'une suite, qui porte le nom de **série**. Nous aborderons la notion de convergence et de divergence d'une série infinie en donnant des règles et des critères permettant d'établir la convergence ou la divergence pour différents types de séries. Nous étudierons finalement la représentation d'une fonction par une série de Maclaurin et par une série de Taylor. L'utilisation des séries en économie permet notamment de trouver le taux de rendement interne d'un investissement ou encore la valeur capitalisée d'une annuité.

## 6.2 Définitions

Nous avons vu au chapitre 3 qu'une **suite finie** avait un nombre fini de termes : $u_1, u_2, u_3, \ldots, u_n$.

**Définition 6.1** *On appelle **série finie** la somme finie* $u_1+u_2+u_3+\cdots+u_n$*, notée* $\sum_{i=1}^{n} u_i$*, où les* $u_i$ *sont les termes d'une suite* $(u_n)$*.*

Il est à remarquer que l'indice de sommation peut tout aussi bien être noté par $k, l, m$ etc. Ainsi, pour désigner la somme $u_1 + u_2 + \cdots + u_n$, on peut indifféremment écrire : $\sum_{i=1}^{n} u_i, \quad \sum_{k=1}^{n} u_k, \quad \sum_{m=1}^{n} u_m$ etc.

On parle de suite infinie lorsqu'elle comporte un nombre illimité de termes et on la note : $u_1, u_2, u_3, \ldots, u_n, \ldots$

**Définition 6.2** *On appelle **série infinie** (ou simplement série) la somme* $u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n + \cdots$, *notée* $\sum_{i=1}^{\infty} u_i$, *où les* $u_i$ *sont les termes d'une suite* $(u_n)$ *infinie.*

Il est parfois pratique de prendre 0 comme indice du premier terme ; dans ce cas, la série s'écrit $\sum_{i=0}^{\infty} u_i$.

Comme dans le cas des suites, le **terme général** ou $n^e$ terme d'une série a une expression indiquant comment former les différents termes de la série.

**Exemple 6.1** *La série finie* $1 + 8 + 27 + 64 + 125$ *peut s'écrire sous forme abrégée* $\sum_{n=1}^{5} n^3$. *La somme de cette série vaut :*

$$\sum_{n=1}^{5} n^3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3 = 225.$$

**Exemple 6.2** *La série infinie* $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots$ *a pour terme général*

$$u_n = \frac{1}{2^{n-1}}$$

*lorsque l'indice du premier terme vaut 1, c'est-à-dire le premier terme s'obtient en posant* $n = 1$, *le deuxième en posant* $n = 2$, *etc. Cette série s'écrit :*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}}.$$

Dans l'exemple 6.2, la somme n'est plus la somme d'un nombre fini de termes comme dans l'exemple 6.1, mais la somme d'un nombre illimité de termes. Pour savoir si cette somme est un nombre fini, il faut introduire la notion de **convergence** et de **divergence** d'une série infinie.

## 6.3 Démonstration par récurrence (induction)

- Pour démontrer qu'une formule $P(n)$ dépendant d'un nombre naturel variable $n$ est vraie quel que soit $n$, on procède en deux étapes :

  1. On vérifie que $P$ est vraie pour $n = 1$ (ancrage).
  2. On démontre que si la proposition est vraie pour un entier $k$ quelconque, elle est aussi vraie pour l'entier $k + 1$.

  Ici l'hypothèse est donc $P(k)$ et on l'appelle **hypothèse de récurrence**, la conclusion doit être $P(k + 1)$.

**Exemple 6.3** *Démontrons par récurrence que :*

$$\sum_{i=1}^{n} i = 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n \cdot (n+1)}{2}.$$

*Posons :* $S_n = 1 + 2 + 3 + \cdots + n$.

*1.* ***Ancrage :*** $S_1 = \frac{1 \cdot (1+1)}{2} = 1$ ;
*la proposition* $S_n = \frac{n \cdot (n+1)}{2}$ *est donc vraie pour* $n = 1$.

*2.* ***Hypothèse de récurrence :*** $S_k = \frac{k \cdot (k+1)}{2}$.
*Il s'agit à présent de montrer que :*

$$S_{k+1} = \frac{(k+1) \cdot (k+2)}{2}.$$

*On a :*

$$\begin{aligned} S_{k+1} &= S_k + (k+1) \\ &= \frac{k \cdot (k+1)}{2} + (k+1) \\ &= (k+1) \cdot \left(\frac{k}{2} + 1\right) \\ &= \frac{(k+1) \cdot (k+2)}{2}. \end{aligned}$$

*Par conséquent,* $S_n = \frac{n \cdot (n+1)}{2}$ *quel que soit l'entier* $n$ *positif, ce qu'il fallait démontrer (c.q.f.d.).*

Cette méthode peut servir, comme l'on vient de le voir, à démontrer la formule générale du $n^e$ terme d'une série. Cette démonstration se passe en deux temps : 1) étant donné une série, deviner la formule générale ; 2) démontrer la formule par induction. La première partie est généralement la plus ardue, étant donné qu'il n'existe pas de méthode générale ni d'algorithme pour trouver la formule. Seul le flair et un peu de chance entrent en jeu !

## 6.4 Convergence et divergence d'une série

Il est clair que la somme d'un nombre fini de termes est un nombre fini. Pour savoir si la somme d'une série infinie est un nombre fini, il faut introduire la notion de **sommes partielles** : pour cela, on forme à partir des termes $u_i$ de la série la suite $(S_n)$ des sommes partielles, où $S_n$ représente la somme des $n$ premiers termes ; ainsi la suite des sommes partielles sera donnée par :

$$\begin{aligned}
S_1 &= u_1 \\
S_2 &= u_1 + u_2 \\
S_3 &= u_1 + u_2 + u_3 \\
S_4 &= u_1 + u_2 + u_3 + u_4 \\
&\vdots \\
S_n &= u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + \cdots + u_n = \sum_{i=1}^{n} u_i.
\end{aligned}$$

Nous pouvons dès lors définir la convergence et la divergence des séries infinies :

**Définition 6.3** *On dit qu'une série* $\sum_{i=1}^{\infty} u_i$ *est **convergente** si et seulement si la suite des sommes partielles converge :*

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} u_i = L.$$

*Dans ce cas, L est appelée **somme de la série** et l'on écrit :* $L = \sum_{i=1}^{\infty} u_i$. *Si la suite des sommes partielles diverge, on dit que la série* $\sum_{i=1}^{\infty} u_i$ *est **divergente**.*

**Exemple 6.4** *Reprenons l'exemple 6.2 pour étudier la convergence de la série* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}}$. *Pour cela, calculons la suite des sommes partielles :*

$$\begin{aligned}
S_1 &= 1 \\
S_2 &= 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \\
S_3 &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{7}{4} \\
S_4 &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{15}{8} \\
&\vdots \\
S_n &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} = \frac{2^n - 1}{2^{n-1}} = 2 - \frac{1}{2^{n-1}} \\
\lim_{n\to\infty} S_n &= \lim_{n\to\infty} \frac{2^n - 1}{2^{n-1}} = \lim_{n\to\infty} \left(2 - \frac{1}{2^{n-1}}\right) = 2.
\end{aligned}$$

*Comme la suite des sommes partielles converge, la série* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}}$ *converge et sa somme vaut 2. Ainsi,*

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}} = 2.$$

**Remarque** Une **condition nécessaire** pour qu'une série $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ converge est que le terme général $u_n$ de la série tende vers 0 lorsque $n$ tend vers l'infini : $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$. Cette condition n'est cependant **pas suffisante,** comme nous le verrons plus loin, au paragraphe 6.6.
En revanche, on peut affirmer :

$$\text{si } \lim_{n\to\infty} u_n \neq 0, \text{ alors la série} \sum_{n=1}^{\infty} u_n \text{ diverge.}$$

**Exemple 6.5** *Soit la série* $\frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \frac{4}{5} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1}$. *Cette série diverge puisque*

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1 \neq 0.$$

## 6.5 Séries géométriques

On appelle **série géométrique** une série dans laquelle les termes $u_i$ sont les termes d'une suite géométrique :

$$u_1 + u_1 \cdot q + u_1 \cdot q^2 + u_1 \cdot q^3 + \cdots + u_1 \cdot q^{n-1} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} u_1 \cdot q^{n-1}.$$

Calculons la suite des sommes partielles :

$$\begin{aligned}
S_1 &= u_1 \\
S_2 &= u_1 + u_1 \cdot q \\
S_3 &= u_1 + u_1 \cdot q + u_1 \cdot q^2 \\
S_4 &= u_1 + u_1 \cdot q + u_1 \cdot q^2 + u_1 \cdot q^3 \\
&\vdots \\
S_n &= u_1 + u_1 \cdot q + u_1 \cdot q^2 + \cdots + u_1 \cdot q^{n-1}
\end{aligned}$$

Ainsi, $q \cdot S_n = u_1 \cdot q + u_1 \cdot q^2 + u_1 \cdot q^3 + \cdots + u_1 \cdot q^n$.
D'où :

$$\begin{aligned}
S_n - q \cdot S_n &= (u_1 + u_1 \cdot q + u_1 \cdot q^2 + u_1 \cdot q^3 + \cdots + u_1 \cdot q^{n-1}) \\
&\qquad -(u_1 \cdot q + u_1 \cdot q^2 + u_1 \cdot q^3 + \cdots + u_1 \cdot q^{n-1} + u_1 \cdot q^n) \\
&= u_1 - u_1 \cdot q^n \\
&\Rightarrow S_n(1-q) = u_1 \cdot (1-q^n) \\
&\Rightarrow S_n = \frac{u_1 \cdot (1-q^n)}{1-q}, q \neq 1.
\end{aligned}$$

Comme $\lim_{n\to\infty} q^n = 0$, si $\mid q \mid < 1$ et $\lim_{n\to\infty} q^n = \infty$, si $\mid q \mid > 1$, on a :

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} S_n &= \lim_{n\to\infty} \frac{u_1 \cdot (1-q^n)}{1-q} = \frac{u_1}{1-q}, \text{ si } \mid q \mid < 1 \text{ et} \\
\lim_{n\to\infty} S_n &= \lim_{n\to\infty} \frac{u_1 \cdot (1-q^n)}{1-q} = \infty \text{ si } \mid q \mid > 1.
\end{aligned}$$

On notera que si $q = -1$, $\lim_{n\to\infty} (-1)^n$ n'existe pas (suite dite oscillante) ; ainsi pour $q = -1$, la série géométrique diverge.

Si $q = 1$, la série géométrique s'écrit $u_1 + u_1 + u_1 + \cdots$ et $S_n = n \cdot u_1$. Comme $\lim_{n\to\infty} n \cdot u_1 = \infty$, la série géométrique diverge lorsque $q = 1$.

On obtient ainsi le résultat suivant :

La série géométrique $u_1 + u_1 \cdot q + u_1 \cdot q^2 + u_1 \cdot q^3 + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} u_1 \cdot q^{n-1}$

- converge et vaut $\dfrac{u_1}{1-q}$ si $| q |< 1$.
- diverge si $| q |\geq 1$.

**Exemple 6.6** *Soit la série géométrique :*

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1},$$

*où* $u_1 = 1$ *et* $q = \dfrac{1}{3}$.

*Comme* $q = \dfrac{1}{3} < 1$*, cette série converge et l'on a :*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} = \frac{1}{1 - 1/3} = \frac{1}{2/3} = \frac{3}{2}.$$

**Exemple 6.7** *Soit la série :*

$$\frac{1}{5^3} + \frac{1}{5^4} + \frac{1}{5^5} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5^{n+2}}.$$

*Il s'agit d'une série géométrique de raison* $q = \dfrac{1}{5}$ *dans laquelle les trois premiers termes ont été omis. On peut écrire la série ci-dessus de la manière suivante :*

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5^{n+2}} &= \left(-1 - \frac{1}{5} - \frac{1}{5^2}\right) + \left(1 + \frac{1}{5} + \frac{1}{5^2}\right) + \frac{1}{5^3} + \frac{1}{5^4} + \cdots \\ &= \left(-1 - \frac{1}{5} - \frac{1}{5^2}\right) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5^n}\end{aligned}$$

*on obtient :*

$$-1 - \frac{1}{5} - \frac{1}{25} + \frac{1}{1 - 1/5} = -\frac{31}{25} + \frac{1}{4/5} = -\frac{31}{25} + \frac{5}{4} = \frac{1}{100}.$$

**Remarque La convergence ou la divergence d'une série n'est pas modifiée si l'on omet ou l'on rajoute un nombre fini de termes.** En revanche, la somme de la série est modifiée (exemple 6.7).

L'étude de la convergence d'une série s'avère nettement plus difficile si l'on ne connaît pas une expression pour le terme général $S_n$ de la suite des sommes partielles. C'est pourquoi nous allons examiner plusieurs méthodes permettant de reconnaître la nature d'une série donnée (autrement dit, de reconnaître si elle est convergente ou divergente).

## 6.6 Séries à termes positifs

Comme son nom l'indique, une série à termes positifs est une série :

$$\sum_{i=1}^{\infty} u_i, \quad \text{où} \quad u_i > 0, \ \forall i \geq 1.$$

Puisque tous les termes sont positifs, la suite des sommes partielles est une suite monotone croissante. Or, le premier critère de convergence d'une suite nous assure qu'une suite croissante et bornée est convergente. On peut donc énoncer le critère de convergence d'une série à termes positifs.

- **Critère de convergence**

  **La série $\sum_{i=1}^{\infty} u_i$ à termes positifs est convergente si et seulement si la suite des sommes partielles est bornée.**

On remarquera que ce critère de convergence est encore valable pour les séries à termes positifs ou nuls, puisque, dans ce cas, la suite des sommes partielles est une suite croissante et que dans le premier critère de convergence d'une suite, il n'est pas nécessaire que la suite soit monotone croissante.

- **Tests de comparaison**

  On appelle **série majorante** une série dont les termes sont plus grands (ou égaux) que les termes correspondants d'une série à termes positifs donnée.

1. **Règle de convergence: Si une série à termes positifs est majorée par une série convergente, alors elle est convergente.**

   En effet, si la série majorante converge, le critère de convergence nous assure que la suite de ses sommes partielles est bornée. Comme cette série majore la série donnée, la suite des sommes partielles de la série donnée est bornée et, par conséquent, elle converge.

   De façon analogue, on peut établir la règle suivante :

2. **Règle de divergence: Si une série à termes positifs majore une série divergente, alors elle est divergente.**

Pour pouvoir appliquer ces règles de comparaison, il faut connaître un certain nombre de séries convergentes et divergentes. Il est, ainsi souvent fort commode de comparer une série à celle de **Riemann** :

$$1+\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}+\frac{1}{4^p}+\cdots+\frac{1}{n^p}+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$$

dont on peut montrer qu'elle **converge si** $p>1$ et **diverge si** $p\leq 1$.

Lorsque $p=1$, on obtient la **série harmonique** :

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{n}+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$$

qui **diverge**.

En effet, comparons la série harmonique dont les termes ont été groupés comme indiqué :

$$1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right)+\left(\frac{1}{9}+\cdots+\frac{1}{16}\right)+\cdots$$

avec la série :

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}\right)+\left(\frac{1}{16}+\cdots+\frac{1}{16}\right)+\cdots$$

qui diverge puisque la somme des termes contenus dans les différentes parenthèses vaut toujours $\frac{1}{2}$ et que, par conséquent, la suite des sommes partielles

$(S_n)$ croît sans limite lorsque $n$ croît indéfiniment. Ainsi, puisque la série harmonique majore cette série divergente, elle est divergente.

L'exemple de la série harmonique nous montre que **la condition** $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$ est une condition nécessaire, mais **pas suffisante** pour que la série $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ converge.

En effet, dans le cas de la série harmonique $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, on a : $\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$, bien que la série diverge.

**Exemple 6.8** *Soit la série :*

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{7} + \frac{1}{12} + \frac{1}{19} + \cdots + \frac{1}{n^2+3} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+3}.$$

*Le terme général de cette série est* $u_n = \frac{1}{n^2+3}$. *Comme* $\frac{1}{n^2+3} < \frac{1}{n^2}, \forall n \geq 1$, *chaque terme de cette série est inférieur au terme correspondant de la série de Riemann avec* $p = 2$ *:*

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \cdots + \frac{1}{n^2} + \cdots$$

*dont on sait qu'elle est convergente* $(p > 1)$. *La série donnée est donc majorée par une série convergente. Par la règle de convergence, la série donnée est donc convergente.*

**Exemple 6.9** *Soit la série :*

$$2 + \frac{5}{8} + \frac{10}{27} + \frac{17}{64} + \cdots + \frac{n^2+1}{n^3} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+1}{n^3}.$$

*Le terme général de cette série est* $u_n = \frac{n^2+1}{n^3} = \frac{1}{n} + \frac{1}{n^3}$. *Comme* $\frac{1}{n} + \frac{1}{n^3} > \frac{1}{n}, \forall n \geq 1$, *chaque terme de cette série est supérieur au terme correspondant de la série harmonique :*

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots$$

*qui diverge. La série majore la série harmonique qui diverge. Par conséquent, la règle de divergence nous assure que la série donnée diverge.*

**Note** La convergence ou la divergence d'une série n'étant pas modifiée lorsqu'on omet un nombre fini de termes, les deux tests de comparaison ci-dessus peuvent être appliqués aux termes intervenant à partir d'un certain rang $u_k, u_{k+1}, u_{k+2}, \ldots$ plutôt qu'à tous les termes $u_1, u_2, u_3, \ldots$

Autrement dit, la règle de convergence et la règle de divergence sont encore valables lorsque les inégalités entre les termes correspondants ne sont satisfaites qu'à partir d'un certain rang.

- **Règle de d'Alembert**

Soit une série à termes positifs $\sum_{i=1}^{\infty} u_i$. Considérons le rapport de deux termes généraux consécutifs $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ appelé **rapport de d'Alembert**.

Désignons par $\beta$ la limite de ce rapport lorsque $n$ devient infiniment grand :

$$\beta = \lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n}.$$

Nous avons la règle suivante :

1. si $\beta < 1$, la série est convergente.
2. si $\beta > 1$, la série est divergente.
3. si $\beta = 1$, on ne peut pas conclure.

**Exemple 6.10** *Rappelons que le produit $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n = n!$ se lit "n factorielle"; par convention, $0! = 1$. Soit la série :*

$$2 + \frac{2}{1!} + \frac{2}{2!} + \frac{2}{3!} + \cdots + \frac{2}{(n-1)!} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{(n-1)!}.$$

*Nous avons :*

$$u_n = \frac{2}{(n-1)!} \text{ et } u_{n+1} = \frac{2}{n!}.$$

*Le rapport de d'Alembert est donc :*

$$\begin{aligned}\frac{u_{n+1}}{u_n} &= \frac{2}{n!}\cdot\frac{(n-1)!}{2}\\ &= \frac{(n-1)!}{n!}\\ &= \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot(n-2)\cdot(n-1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot(n-2)\cdot(n-1)\cdot n}\\ &= \frac{1}{n}\\ \beta &= \lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0.\end{aligned}$$

*Ainsi* $\beta = 0 < 1 \Rightarrow$ *la série est convergente.*

**Exemple 6.11** *Soit la série :*

$$\frac{1!}{4} + \frac{2!}{4^2} + \cdots + \frac{n!}{4^n} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{4^n}$$

$$u_n = \frac{n!}{4^n} \ \textit{ et } \ u_{n+1} = \frac{(n+1)!}{4^{n+1}}$$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)!}{4^{n+1}}\cdot\frac{4^n}{n!} = \frac{n+1}{4}$$

$$\beta = \lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{4} = \infty.$$

*Comme* $\beta > 1$*, la série est divergente.*

**Exemple 6.12** *Soit la série :*

$$\frac{2}{1\cdot 2} + \frac{2}{3\cdot 4} + \frac{2}{5\cdot 6} + \cdots + \frac{2}{(2n-1)\cdot(2n)} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{(2n-1)\cdot(2n)}$$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2}{(2n+1)\cdot(2n+2)}\cdot\frac{(2n-1)\cdot(2n)}{2} = \frac{4n^2-2n}{4n^2+6n+2}$$

$$\beta = \lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{4n^2-2n}{4n^2+6n+2} = 1.$$

*La règle de d'Alembert ne nous permet pas de conclure. Cependant, il est possible d'utiliser, dans ce cas, le test de comparaison avec une série convergente : en effet, comparons la série donnée à la série de Riemann où* $p = 2$ *:*

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

*Les termes de la série* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{(2n-1)\cdot(2n)}$ *étant inférieurs aux termes correspondants de la série de Riemann* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ *qui est convergente, la série donnée est convergente.*

**Remarque** Une série à termes négatifs peut être étudiée comme l'opposé d'une série à termes positifs.

**Exemple 6.13** *La série :*

$$-1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \cdots - \frac{1}{n} - \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{1}{n}$$

*est l'opposé de la série harmonique*

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}.$$

*Dans ce cas,* $\sum_{n=1}^{\infty} -\frac{1}{n} = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$. *Comme* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ *diverge, il en est de même pour la série* $\sum_{n=1}^{\infty} -\frac{1}{n}$.

## 6.7 Séries alternées

On appelle **série alternée** une série dont les termes sont alternativement positifs et négatifs :

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot u_n = u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \cdots,$$

où chaque terme $u_i$ **est positif**.

- **Critère de Leibniz**

  Une série alternée $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1} \cdot u_n$ converge si les deux conditions suivantes sont satisfaites simultanément :

  1. $u_n > u_{n+1}, \ \forall n \geq 1$.
  2. $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$.

  En effet, pour ***n* pair**, la suite des sommes partielles $S_n = u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \cdots - u_n$, peut s'écrire :

  $$S_n = (u_1 - u_2) + (u_3 - u_4) + \cdots + (u_{n-1} - u_n).$$

  Ainsi, cette suite est croissante puisque $(u_n - u_{n+1}) > 0, \ \forall n \geq 1$ (1re condition). D'autre part,

  $$S_n = u_1 - (u_2 - u_3) - (u_4 - u_5) - \ldots - (u_{n-2} - u_{n-1}) - u_n.$$

  Ainsi, $S_n < u_1$ puisqu'on ne soustrait à $u_1$ que des expressions positives. Par conséquent, la suite des sommes partielles est croissante et bornée, donc convergente d'après le critère de convergence, c'est-à-dire $S_n$ tend vers une limite : $\lim_{n\to\infty} S_n = L$, pour $n$ pair.

  Considérons maintenant la somme partielle $S_{n+1} = S_n + u_{n+1}$ et montrons qu'elle tend vers la même limite $L$ :

  $$\lim_{n\to\infty} S_{n+1} = \lim_{n\to\infty} S_n + \lim_{n\to\infty} u_{n+1} = L + 0 = L \quad \text{(2ème condition)}.$$

  D'où, pour $n$ **quelconque**, $\lim_{n\to\infty} S_n = L$ et la série converge.

**Exemple 6.14** *Soit la* ***série harmonique alternée*** *:*

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1} \cdot \frac{1}{n}$$

$$u_n = \frac{1}{n} \quad et \quad u_{n+1} = \frac{1}{n+1}.$$

*Voyons si les deux conditions du critère de Leibniz sont vérifiées. On a :*

$$\left.\begin{array}{ll} 1^o & \dfrac{1}{n} > \dfrac{1}{n+1}, \ \forall n \geq 1 \\ 2^o & \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \textit{la série} \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1} \cdot \frac{1}{n} \ \textit{converge.}$$

Nous pouvons, dès lors, résumer les différents types de séries et l'étude de leur convergence :

1. Soit une série $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ à termes de signe quelconque.
   Si $\lim_{n\to\infty} u_n \neq 0$, alors la série diverge.

2. Soit une série alternée $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1} \cdot u_n$. On utilise le critère de Leibniz.
   Si $u_n > u_{n+1}$, $\forall n \geq 1$ **et** $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$, alors la série converge.

3. Soit une série $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ à termes positifs. On utilise la règle de d'Alembert en calculant $\beta = \lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n}$.
   Si $\beta < 1$, la série converge.
   Si $\beta > 1$, la série diverge.
   Si $\beta = 1$, on ne peut pas conclure.

4. Soit une série $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ à termes positifs. Lorsque la règle de d'Alembert échoue, c'est-à-dire lorsque $\beta = 1$, on utilise les tests de comparaison avec une autre série que nous savons être convergente ou divergente (série géométrique, série de Riemann).

   Si cette nouvelle série majore la série donnée et qu'elle converge, alors la série donnée converge.

   Si la série donnée majore cette nouvelle série et que celle-ci diverge, alors la série donnée est divergente.

## 6.8 Convergence absolue

Considérons une série $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ à termes de signe quelconque.

Une telle série est dite absolument convergente si la série des valeurs absolues :

$$\sum_{n=1}^{\infty} | u_n |=| u_1 | + | u_2 | + | u_3 | + \cdots + | u_n | + \cdots$$

converge.

Il est clair que toute série à termes positifs qui converge est absolument convergente. D'autre part, on peut montrer le résultat important suivant : **toute série absolument convergente est convergente.**

La réciproque est fausse. Par exemple, la série harmonique alternée $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots$ converge tandis que la série harmonique $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots$ diverge.

De manière générale, lorsque la série à termes de signe quelconque $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ converge, mais que $\sum_{n=1}^{\infty} | u_n |$ diverge, on dit que la série $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ est **semi-convergente**.

**Exemple 6.15** *Soit la série :*

$$1 - \frac{1}{7} + \frac{1}{49} - \frac{1}{343} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{7}\right)^{n-1}.$$

*Cette série est absolument convergente puisque la série des valeurs absolues* $1 + \frac{1}{7} + \frac{1}{49} + \frac{1}{343} + \cdots$ *est une série géométrique de raison* $\frac{1}{7}$. *La série alternée donnée (série géométrique de raison* $-\frac{1}{7}$*) est donc convergente puisqu'elle est absolument convergente.*

On remarquera qu'une série géométrique convergente est absolument convergente.

**Exemple 6.16** *Soit la série :*

$$1 - \frac{1}{\sqrt[3]{2}} + \frac{1}{\sqrt[3]{3}} - \frac{1}{\sqrt[3]{4}} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{n}}.$$

*Cette série est convergente. En effet, par le critère de Leibniz :*

$$\frac{1}{\sqrt[3]{n}} > \frac{1}{\sqrt[3]{n+1}}, \quad \forall n \geq 1 \text{ et } \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n}} = 0.$$

*Les deux conditions pour qu'une série alternée converge étant vérifiées, la série* $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{n}}$ *converge.*
*La série des valeurs absolues :*

$$1 + \frac{1}{\sqrt[3]{2}} + \frac{1}{\sqrt[3]{3}} + \frac{1}{\sqrt[3]{4}} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1/3}}$$

*diverge, puisqu'il s'agit de la série de Riemann avec* $p = \frac{1}{3} < 1$. *La série donnée est donc semi-convergente.*

Pour déterminer si une série converge absolument, la règle de d'Alembert est encore valable.

- **Règle de d'Alembert pour la convergence absolue**

  Soit une série $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ à termes de signe quelconque.

1. Si $\lim_{n\to\infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| < 1$, alors la série converge absolument.
2. Si $\lim_{n\to\infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| > 1$, alors la série diverge.
3. Si $\lim_{n\to\infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = 1$, on ne peut pas conclure.

**Exemple 6.17** *Soit la série*

$$\frac{3}{2!} - \frac{3^3}{4!} + \frac{3^5}{6!} - \frac{3^7}{8!} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1} \cdot \frac{3^{2n-1}}{(2n)!}.$$

$$u_n = \frac{(-1)^{n-1} \cdot 3^{2n-1}}{(2n)!} \quad \textit{et } u_{n+1} = \frac{(-1)^n \cdot 3^{2n+1}}{(2n+2)!}$$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(-1)^n \cdot 3^{2n+1}}{(2n+2)!} \cdot \frac{(2n)!}{(-1)^{n-1} \cdot 3^{2n-1}} = \frac{-9}{(2n+1) \cdot (2n+2)}$$

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{9}{4n^2+6n+2} = 0 < 1.$$

*Par conséquent, la série donnée est absolument convergente.*

## 6.9 Séries de puissances

- **Séries de puissances en $x$**

  Une série infinie de la forme :

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots$$

  où les coefficients $a_i$ sont des réels indépendants de $x$, est appelée **série de puissances en $x$**.

Notons que la série de puissances $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots$ converge (absolument) pour $x = 0$, puisque :

$$|a_0| + |a_1 \cdot 0| + |a_2 \cdot 0| + \cdots = |a_0|.$$

La règle de d'Alembert pour la convergence absolue nous permet de déterminer l'intervalle de convergence :

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| &= \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1} \cdot x^{n+1}}{a_n \cdot x^n} \right| \\
&= \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \cdot x \right| \\
&= |\, x \,| \cdot \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|.
\end{aligned}$$

Par la règle de d'Alembert, nous savons que cette série converge abso-lument lorsque $|\, x \,| \cdot \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| < 1$, c'est-à-dire pour :

$$|\, x \,| < \frac{1}{\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|}.$$

**Trois cas se présentent :**

1. Si $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 0$, la série est absolument convergente pour $\mid x \mid < \infty$, c'est-à-dire pour toute valeur de $x$.

2. Si $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = L$, $L$ étant un nombre fini non nul, la série est absolument convergente pour $\mid x \mid < \dfrac{1}{L}$, c'est-à-dire si $x$ satisfait
$$-\frac{1}{L} < x < \frac{1}{L}.$$
La série diverge pour $\mid x \mid > \dfrac{1}{L}$.
Pour $x = -\dfrac{1}{L}$ et $x = \dfrac{1}{L}$, la série peut converger ou diverger ; il faut donc étudier les **bornes de l'intervalle séparément**.

3. Si $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \infty$, la série ne converge absolument que pour $x = 0$ et diverge pour toutes les autres valeurs de $x$.

**Exemple 6.18** *Soit la série de puissances :*
$$1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \cdot \frac{x^n}{n!}.$$
$$u_n = \frac{(-1)^n \cdot x^n}{n!}\ ;\ a_n = \frac{(-1)^n}{n!}\ et\ a_{n+1} = \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!}.$$
*Calculons :*
$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!}\cdot\frac{n!}{(-1)^n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{-1}{n+1}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1} = 0.$$
*Par conséquent, la série converge absolument pour toute valeur de $x$, c'est-à-dire pour $-\infty < x < \infty$. Cette série a donc pour intervalle de convergence :* $]-\infty;\infty[$.

**Exemple 6.19** *Déterminons l'intervalle de convergence de chacune des séries de puissances :*

*(a)* $1 + 2x + 4x^2 + 8x^3 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} 2^n x^n.$

$$a_n = 2^n \text{ et } a_{n+1} = 2^{n+1}.$$

*Ainsi,* $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{2^{n+1}}{2^n}\right| = \lim_{n\to\infty} \mid 2 \mid = 2.$

*La série converge absolument pour* $-\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}.$

*Reste à examiner les bornes :*

*Si* $x = -\frac{1}{2}$, *la série est :* $1 - 1 + 1 - 1 + \cdots$ *qui diverge puisque le terme général ne tend pas vers 0.*

*Si* $x = \frac{1}{2}$, *la série est :* $1 + 1 + 1 + 1 + \cdots$ *qui diverge pour la même raison.*

*Cette série a donc pour intervalle de convergence* $]-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}[$.

*(b)* $\frac{1}{2} + \frac{x}{3} + \frac{x^2}{4} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n+2}.$

$$a_n = \frac{1}{n+2} \text{ et } a_{n+1} = \frac{1}{n+3}.$$

*Ainsi,* $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{n+2}{n+3}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{n+2}{n+3} = 1.$

*La série converge absolument pour* $-1 < x < 1.$

*Pour* $x = -1$, *la série est :* $\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \cdots$ *qui converge puisque les deux conditions du critère de Leibniz sont satisfaites.*

*Pour* $x = 1$, *la série est* $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots$ *qui diverge puisqu'il s'agit de la série harmonique dont on a omis le premier terme.*

*La série entière* $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n+2}$ *a donc pour intervalle de convergence* $[-1; 1[$.

*(c)* $x + \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{9} + \frac{x^4}{16} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}.$

$$a_n = \frac{1}{n^2} \text{ et } a_{n+1} = \frac{1}{(n+1)^2}.$$

*Ainsi,* $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{(n+1)^2} = \lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{n^2+2n+1} = 1.$
*La série converge absolument pour* $-1 < x < 1$.
*Pour* $x = -1$*, la série est* $-1+\frac{1}{4}-\frac{1}{9}+\frac{1}{16}-\cdots$ *qui converge puisque la série des valeurs absolues :*

$$1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\cdots$$

*converge (série de Riemann avec* $p = 2$*).*
*Pour* $x = 1$*, la série est* $1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\cdots$ *qui converge.*
*La série de puissances* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^2}$ *a donc pour intervalle de convergence* $[-1;1]$.

**Exemple 6.20** *Soit la série de puissances :*

$$1+\frac{x}{3}+\frac{2x^2}{9}+\frac{6x^3}{27}+\frac{24x^4}{81}+\cdots = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{n!x^n}{3^n}.$$

$$a_n = \frac{n!}{3^n} \text{ et } a_{n+1} = \frac{(n+1)!}{3^{n+1}}.$$

*Ainsi,* $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!}{3^{n+1}}\cdot\frac{3^n}{n!} = \lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{3} = \infty.$
*Par conséquent, la série ne converge que pour* $x = 0$ *et diverge pour toutes les autres valeurs de* $x$.

- **Séries de puissances en $x - a$**

Une série infinie de la forme

$$\sum_{i=0}^{\infty} b_i(x-a)^i = b_0+b_1\cdot(x-a)+b_2\cdot(x-a)^2+\cdots+b_n(x-a)^n+\cdots$$

où $a$ est donné et les coefficients $b_i$ sont indépendants de $x$, est appelée **série de puissances en $x - a$**.

Notons qu'une série de puissances en $(x-a)$ converge (absolument) pour $x = a$, puisque :

$$| b_0 | + | b_1(a-a) | + | b_2(a-a)^2 | + \cdots = | b_0 | .$$

Utilisons la règle de d'Alembert pour la convergence absolue afin de déterminer l'intervalle de convergence d'une telle série :

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| &= \lim_{n\to\infty} \left| \frac{b_{n+1} \cdot (x-a)^{n+1}}{b_n \cdot (x-a)^n} \right| \\
&= \lim_{n\to\infty} \left| \frac{b_{n+1}}{b_n} \cdot (x-a) \right| \\
&= | x-a | \cdot \lim_{n\to\infty} \left| \frac{b_{n+1}}{b_n} \right| .
\end{aligned}$$

La série converge absolument lorsque $| x-a | \cdot \lim_{n\to\infty} \left| \frac{b_{n+1}}{b_n} \right| < 1$, c'est-à-dire lorsque :

$$| x-a | < \frac{1}{\lim_{n\to\infty} \left| \frac{b_{n+1}}{b_n} \right|} .$$

À nouveau, trois cas se présentent :

1. Si $\lim_{n\to\infty} \left| \frac{b_{n+1}}{b_n} \right| = 0$, la série est absolument convergente pour toute valeur de $x$.
2. Si $\lim_{n\to\infty} \left| \frac{b_{n+1}}{b_n} \right| = M$, $M$ étant un nombre réel positif, la série est absolument convergente pour $| x-a | < \frac{1}{M}$, c'est-à-dire si $x$ satisfait

   $$a - \frac{1}{M} < x < a + \frac{1}{M} .$$

   **Les bornes de l'intervalle devront être étudiées séparément.**
3. Si $\lim_{n\to\infty} \left| \frac{b_{n+1}}{b_n} \right| = \infty$, la série ne converge absolument que pour $x = a$ et diverge pour toutes les autres valeurs de $x$.

**Exemple 6.21** *Soit la série de puissances en* $(x-3)$ *:*

$$(x-3)-\frac{1}{2}(x-3)^2+\frac{1}{3}(x-3)^3+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\cdot(x-3)^n.$$

$$b_n=\frac{(-1)^{n-1}}{n} \quad \textit{et} \quad b_{n+1}=\frac{(-1)^n}{n+1}.$$

*Ainsi,* $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{b_{n+1}}{b_n}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)^n}{n+1}\cdot\frac{n}{(-1)^{n-1}}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=1.$

*La série converge absolument pour* $3-\frac{1}{1}<x<3+\frac{1}{1}$*,*
*c'est-à-dire pour* $2<x<4$*.*
*Il s'agit à présent d'examiner les bornes 2 et 4 :*
*Si* $x=2$*, la série est :* $-1-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}-\frac{1}{4}-\cdots$ *qui est l'opposé de la série harmonique. Par conséquent, elle diverge.*
*Si* $x=4$*, la série est :* $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots$ *dont on sait qu'elle converge (exemple 6.14).*
*La série de puissances* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\cdot(x-3)^n$ *a donc pour intervalle de convergence* $]2;4]$.

## 6.10 Série de Maclaurin

On peut représenter une fonction au moyen d'une série de puissances.

Une série de puissances convergente, de la variable $x$, est fort commode pour le calcul des valeurs de la fonction qu'elle représente, pour des valeurs de $x$ voisines de zéro.

- **Formule de Maclaurin**

  La série :

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}\cdot x+\frac{f''(0)}{2!}\cdot x^2+\cdots+\frac{f^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}\cdot x^{n-1}+R_n.$$

  converge et représente la fonction $f(x)$ pour les valeurs de $x$ pour lesquelles toutes les dérivées de $f(x)$ existent et pour lesquelles $\lim\limits_{n\to\infty}R_n=0$.

Dans ce cas, on dit que cette série est le développement de $f(x)$ en série de Maclaurin au voisinage de $x = 0$.

$R_n$ est appelé **le reste après $n$ termes** et on peut montrer que :

$$R_n = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!} \cdot x^n \quad \text{avec} \quad 0 \leq \xi \leq x.$$

**Remarque** Il existe des fonctions pour lesquelles la série de Maclaurin converge pour des valeurs de $x$, sans que le reste tende vers 0 lorsque $n$ tend vers l'infini. Pour de telles valeurs de $x$, la série de Maclaurin ne représente pas la fonction. Cependant, le plus souvent, l'intervalle de convergence de la série coïncide avec l'intervalle sur lequel $\lim\limits_{n\to\infty} R_n = 0$, ce qui est le cas dans les exemples considérés dans ce paragraphe.

Sans donner une preuve rigoureuse de la formule de Maclaurin, nous pouvons cependant rendre ce résultat plausible de la manière suivante. Supposons qu'une fonction $f(x)$ et toutes ses dérivées existent pour $x = 0$ et que cette fonction puisse être développée en une série de puissances en $x$ :

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots + a_nx^n + \cdots \tag{6.1}$$

Supposons maintenant que l'on puisse dériver $n$ fois cette série par rapport à $x$ :

$$\begin{aligned}
f'(x) &= a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \cdots + na_nx^{n-1} + \cdots \\
f''(x) &= 2a_2 + 2 \cdot 3a_3x + \cdots + (n-1) \cdot na_nx^{n-2} + \cdots \\
f'''(x) &= 2 \cdot 3a_3 + \cdots + (n-2) \cdot (n-1) \cdot na_nx^{n-3} + \cdots \\
&\vdots \\
f^{(n)}(x) &= 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-2) \cdot (n-1) \cdot na_n + \ldots.
\end{aligned}$$

Ainsi :

$$f^{(n)}(0) = n! \cdot a_n.$$

Par conséquent :

$$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}, \quad \forall n \geq 0.$$

En remplaçant ces coefficients dans (6.1), on obtient la **série de Maclaurin :**

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!} \cdot x + \frac{f''(0)}{2!} \cdot x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \cdot x^n + \cdots$$

Dans tous les calculs pratiques, on cherche des résultats exacts jusqu'à un certain nombre de décimales. Comme l'opération en question remplace une fonction qui peut être difficile à calculer, par un polynôme ordinaire, elle est très utile pour simplifier de tels calculs.

Naturellement, on doit utiliser suffisamment de termes pour obtenir le degré d'exactitude désiré. Le reste après $n$ termes fournit une bonne indication sur l'erreur commise en utilisant seulement les $n$ premiers termes de la série.

**Exemple 6.22** *Développons la fonction $y = f(x) = e^x$ en série de Maclaurin afin de déterminer une approximation de $e^{1/4}$.*

$$\begin{aligned} f(x) &= e^x \Rightarrow f(0) = 1. \\ f'(x) &= e^x \Rightarrow f'(0) = 1. \\ f''(x) &= e^x \Rightarrow f''(0) = 1. \\ &\vdots \\ f^{(n)}(x) &= e^x \Rightarrow f^{(n)}(0) = 1. \end{aligned}$$

*d'où :* $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots$.

*Voyons quel est l'intervalle de convergence de cette série :*

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{n!}{(n+1)!} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0.$$

*Cette série converge pour toute valeur de $x$.*

*Pour $x = \frac{1}{4}$, nous avons :*

$$e^{1/4} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{(1/4)^2}{2!} + \frac{(1/4)^3}{3!} + \cdots + \frac{(1/4)^n}{n!} + \cdots$$

*en prenant cinq termes, nous avons :*

$$\begin{aligned} e^{1/4} &= 1 + \frac{1}{4} + \frac{(1/4)^2}{2!} + \frac{(1/4)^3}{3!} + \frac{(1/4)^4}{4!} + R_5 \\ &= 1 + 0.25 + 0.03125 + 0.00260417 + 0.00016276 + R_5 \\ &= 1.28401693 + R_5. \end{aligned}$$

*Le reste après $n$ termes étant donné par :* $R_n = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!} \cdot x^n$, *avec* $0 \leq \xi \leq x$, *nous avons :*

$$R_5 = \frac{e^\xi}{5!} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^5, \ \text{avec } 0 \leq \xi \leq \frac{1}{4}.$$

*Par conséquent :*

$$R_5 \leq \frac{e^{1/4}}{5!} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^5.$$

*En admettant raisonnablement que* $e^{1/4} < 2$, *on a :*

$$R_5 < \frac{2}{5!} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^5 = 0.00001628.$$

*Ainsi,* $e^{1/4} = 1.2840$ *est correct avec 4 décimales.*

## 6.11 Série de Taylor

On peut former une série en $(x - a)$ de la même manière que la série de Maclaurin. Cette série se prête bien au calcul des valeurs de la fonction qu'elle représente pour des valeurs de $x$ proches de $a$.

- **Formule de Taylor**

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!} \cdot (x-a) + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!} \cdot (x-a)^{n-1} + R_n$$

$$\text{où } R_n = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!} \cdot (x-a)^n, \text{ avec } a \leq \xi \leq x.$$

Cette série porte le nom de **série de Taylor**. On dit qu'elle est le développement de $f(x)$ au voisinage de $x = a$.

Les hypothèses selon lesquelles cette série représente $f(x)$ sont les mêmes que pour une série de Maclaurin. La justification de cette formule ainsi que la remarque faite au paragraphe précédent s'appliquent également ici.

**Exemple 6.23** *Développons en série de Taylor la fonction donnée par* $f(x) = \ln x$ *au voisinage de 1 (on notera que cette fonction ne peut pas être développée en série de Maclaurin).*
*Les dérivées successives sont :*

$$f(x) = \ln x \Rightarrow f(1) = 0.$$

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{1}{x} \Rightarrow f'(1) = 1.\\
f''(x) &= -\frac{1}{x^2} \Rightarrow f''(1) = -1.\\
f'''(x) &= \frac{2}{x^3} \Rightarrow f'''(1) = 2.\\
f^{iv}(x) &= -\frac{2 \cdot 3}{x^4} \Rightarrow f^{iv}(1) = -6.\\
&\vdots\\
f^{(n)}(x) &= \frac{(-1)^{n+1} \cdot (n-1)!}{x^n}, \forall n \geq 1.
\end{aligned}$$

*La série de Taylor est donc :*

$$\begin{aligned}
\ln x &= \frac{(x-1)}{1!} - \frac{(x-1)^2}{2!} + \frac{2!(x-1)^3}{3!} - 3!\frac{(x-1)^4}{4!} + \cdots\\
&= (x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} - \frac{(x-1)^4}{4} + \cdots
\end{aligned}$$

*Déterminons l'intervalle de convergence de cette série :*

$$b_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n} \ \text{ et } b_{n+1} = \frac{(-1)^{n+2}}{n+1}$$

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{(-1)^{n+2}}{n+1} \cdot \frac{n}{(-1)^{n+1}} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1.$$

*Par conséquent, la série converge absolument pour* $1 - \frac{1}{1} < x < 1 + \frac{1}{1}$, *c'est-à-dire pour* $0 < x < 2$.

*Pour* $x = 0$, *la série est* $-1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} - \ldots - \frac{1}{n} - \ldots$ *qui diverge.*

*Pour* $x = 2$, *la série est* $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots + \frac{(-1)^{n+1}}{n} + \ldots$ *qui converge.*

*Ainsi, l'intervalle de convergence de cette série est* $]0; 2]$.

*Calculons par exemple une approximation de* $\ln(1.2)$ *en prenant trois termes :*

$$\begin{aligned}
\ln(1.2) &= (1.2-1) - \frac{(1.2-1)^2}{2} + \frac{(1.2-1)^3}{3} + R_4\\
&= 0.2 - \frac{(0.2)^2}{2} + \frac{(0.2)^3}{3} + R_4\\
&= 0.2 - 0.02 + 0.002666 + R_4\\
&= 0.182666 + R_4.
\end{aligned}$$

*Comme* $R_n = \dfrac{f^{(n)}(\xi)}{n!} \cdot (x-a)^n$ , *avec* $a \leq \xi \leq x$, *on a :*

$$R_4 = \frac{\frac{(-1)^5 \cdot 3!}{\xi^4}}{4!} \cdot (0.2)^4 = \frac{\frac{-6}{\xi^4}}{24} \cdot (0.2)^4, \;\; \textit{avec } 1 \leq \xi \leq 1.2$$

*Par conséquent :*

$$\mid R_4 \mid \leq \frac{6 \cdot (0.2)^4}{24 \cdot 1^4} = 0.0004.$$

*Ainsi,* $\ln(1.2) = 0.182666$ *est correct avec au moins trois décimales.*

En fait, pour une série alternée, on peut montrer que l'erreur commise est, en valeur absolue, plus petite que le premier terme négligé. Dans l'exemple 6.23, le premier terme négligé est : $\dfrac{(0.2)^4}{4} = 0.0004$. Par conséquent, l'erreur commise en calculant $\ln(1.2) = 0.182666$ avec trois termes n'excède pas 0.0004, et donc le résultat obtenu est correct avec trois décimales.

# Exercices

1. Trouver une formule pour : $S_n = 2^0+2^1+2^2+\cdots+2^n$, puis la démontrer par récurrence.

2. Démontrer que :

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\cdots+\frac{1}{n\cdot(n+1)}=\frac{n}{n+1}.$$

3. Soit la série de terme général $u_n = \dfrac{1}{n\cdot(n+1)}$.
   Calculer $S_n$ pour $n = 1, 2, 3, \ldots, n$.
   Montrer que cette série converge en montrant que sa somme vaut 1.

4. Trouver la somme des deux séries suivantes :

   (a) $1+\dfrac{1}{5}+\dfrac{1}{25}+\dfrac{1}{125}+\cdots$

   (b) $1+2+3+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{8}+\dfrac{1}{16}+\dfrac{1}{32}+\cdots$

5. Trouver la somme des séries suivantes :

   (a) $1+4+5+\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{16}+\dfrac{1}{64}+\dfrac{1}{256}+\dfrac{1}{1024}+\cdots$

   (b) $\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{9}+\dfrac{1}{27}+\dfrac{1}{81}+\dfrac{1}{243}+\cdots$

6. Indiquer si les séries suivantes convergent ou divergent.
   Justifier à chaque fois la réponse :

   (a) $\dfrac{1}{3}+\dfrac{2}{3^2}+\dfrac{3}{3^3}+\dfrac{4}{3^4}+\cdots$

   (b) $\dfrac{2}{1}+\dfrac{2^2}{2!}+\dfrac{2^3}{3!}+\dfrac{2^4}{4!}+\cdots$

   (c) $\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{8}-\frac{1}{16}+\frac{1}{32}-\ldots$

   (d) $\dfrac{1}{1}+\dfrac{2!}{2^2}+\dfrac{3!}{3^3}+\dfrac{4!}{4^4}+\cdots$

**Indication** $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e.$

7. Étudier la convergence des séries suivantes :

   (a) $\frac{3}{1\cdot 2}+\frac{4}{2\cdot 2^2}+\frac{5}{3\cdot 2^3}+\frac{6}{4\cdot 2^4}+\cdots$

   (b) $1+\frac{2^2+1}{2^3+1}+\frac{3^2+1}{3^3+1}+\frac{4^2+1}{4^3+1}+\cdots$

   (c) $\frac{1}{3}+\frac{1}{10}+\frac{1}{29}+\frac{1}{66}+\frac{1}{127}+\frac{1}{218}+\cdots$

   (d) $\frac{1}{1}-\frac{3}{4}+\frac{5}{9}-\frac{7}{16}+\frac{9}{25}-\ldots$

8. Pour quelles valeurs de $x$ les séries suivantes convergent-elles ?

   (a) $1+\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}+\frac{x^3}{4}+\cdots$

   (b) $x+2x^2+3x^3+4x^4+\cdots$

   (c) $(x-2)+2!(x-2)^2+3!(x-2)^3+4!(x-2)^4+\cdots$

   (d) $\frac{x-5}{1\cdot 3}+\frac{(x-5)^2}{2\cdot 3^2}+\frac{(x-5)^3}{3\cdot 3^3}+\frac{(x-5)^4}{4\cdot 3^4}+\cdots$

9. Développer en série de Maclaurin les fonctions suivantes, en indiquant chaque fois sur quel intervalle ces séries convergent :
   (a) $f(x)=e^x$ (b) $f(x)=\sin x$ (c) $f(x)=\ln(1+x)$
   Déduire du point c) la valeur de la somme de la série harmonique alternée : $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots$

10. Développer en puissance de $(x-4)$ la fonction $f(x)=e^{x/4}$.

11. Le développement en série de puissances de la fonction $f(x)=\cos x$ est donné par :

$$1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\frac{x^8}{8!}-\cdots$$

   Faire trois graphes où l'on représentera successivement :

(a) $f(x) = \cos x$ et $g_1(x) = 1 - \dfrac{x^2}{2}$.

(b) $f(x) = \cos x$ et $g_2(x) = 1 - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^4}{24}$.

(c) $f(x) = \cos x$ et $g_3(x) = 1 - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^4}{24} - \dfrac{x^6}{720}$.

Commentaire !

**Note** Représenter ces trois graphes sur l'intervalle $[-\pi; \pi\ ]$.

12. Trouver une valeur approchée de $\cos\left(\dfrac{\pi}{6}\right)$ (avec quatre décimales exactes) à l'aide de la série de Maclaurin de $f(x) = \cos x$.

13. Trouver une valeur approchée de $\sqrt{1.21}$ (avec trois décimales exactes) à l'aide de la série de Taylor de $f(x) = \sqrt{x}$ au voisinage de 1.



## LEIBNIZ Gottfried Willhelm (1646-1716)

Philosophe et mathématicien allemand, Leibniz est né à Leipzig, en 1646. En 1666, il soumet sa thèse de Doctorat en droit. En 1667, il devient conseiller à la Cour suprême de l'Électorat de Mayence. En 1673, en Angleterre, il découvre en même temps, et indépendamment de Newton, le calcul différentiel. Onze ans plus tard, il publie les résultats de sa découverte dans son *Nova methodus pro maximis et minimis.* En 1676, il obtient un poste de libraire à Hanovre, qu'il occupera jusqu'à sa mort. Ne se déplaçant que très rarement, il entretient une correspondance accrue avec des savants de toute l'Europe. De ce fait, il devint le centre d'un important réseau d'échanges. Il meurt à Hanovre en 1716. On peut définir Leibniz aussi bien comme mathématicien et philosophe que comme linguiste, juriste, historien, géographe, diplomate ou théologien. Scientifiquement parlant, il est à la fois un inventeur pour ses contributions scientifiques et mathématiques (invention du calcul différentiel, développement du calcul intégral), et un encyclopédiste pour son projet d'inventorier toutes les connaissances acquises et sa tentative de mettre en place un langage universel. Œuvres majeures : *On the Art of Combination* (1666), *New Physical Hypothesis* (1671), *Discourse of Metaphysics* (1685), *the New System* (1695), *New Essays on Human Understanding* (1705), *Theodicy* (1710), *the Monadology* (1713).

# Chapitre 7

# Fonctions de plusieurs variables

## 7.1 Introduction

Jusqu'à présent, dans les chapitres précédents, nous avons traité des fonctions d'une seule variable, c'est-à-dire des fonctions sous la forme explicite $y = f(x)$ ou sous la forme implicite $f(x, y) = 0$. De telles fonctions expriment une relation entre deux variables, $x$ et $y$, et cela implique que le phénomène étudié peut être représenté d'une façon correcte uniquement par deux variables. Bien que ce type de représentation nous donne une image raisonnable de la réalité, dans différents cas, une telle représentation est tellement inadéquate qu'elle en devient inutile. Souvent, il est nécessaire d'exprimer une variable comme une fonction de plusieurs autres variables. Par exemple, en économie, la demande d'un bien ne dépend pas seulement de son prix, mais aussi du revenu du consommateur, du prix des autres biens et d'autres facteurs encore.

Dans ce chapitre, nous allons présenter les dérivées partielles et leurs applications économiques, les minima et maxima d'une fonction de deux variables, les multiplicateurs de Lagrange qui permettent de trouver des extrema sous contraintes et enfin des applications économiques des multiplicateurs de Lagrange.

## 7.2 Définitions

Nous allons considérer des fonctions de deux ou plusieurs variables indépendantes dont nous pouvons citer quelques exemples tirés de formules mathématiques élémentaires ; ainsi, l'aire $S$ d'un triangle quelconque : $S = \frac{1}{2} \cdot b \cdot h$ est une fonction de deux variables indépendantes : $b$ (base du triangle) et $h$ (hauteur du triangle).

Le volume $V$ d'un parallélipipède rectangle est donné par :

$$V = a \cdot b \cdot c,$$

où $a$, $b$ et $c$ sont les longueurs respectives des arêtes. Ici, $V$ est une fonction de trois variables $a$, $b$ et $c$.

**Définition 7.1** *On dit que $z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ est une* ***fonction de n variables*** *indépendantes si à tout système de valeurs des variables indépendantes $x_1, x_2, \ldots, x_n$ correspond une valeur bien déterminée de la variable dépendante $z$.*

Dans ce chapitre, nous nous intéresserons plus particulièrement au cas des fonctions de deux variables.

**Définition 7.2** *Si, à chaque couple $(x; y)$ de valeurs de deux variables indépendantes $x$ et $y$ correspond une valeur bien déterminée de la variable dépendante $z$, on dit que $z$ est une* ***fonction de deux variables*** *indépendantes $x$ et $y$. Une fonction de deux variables est notée $z = f(x, y)$.*

**Définition 7.3** *On appelle* ***domaine de définition*** *de la fonction $z = f(x, y)$ l'ensemble des couples $(x; y)$ pour lesquels cette fonction est définie. On note par $D$ le domaine de définition.*

Le domaine de définition peut être représenté géométriquement par l'ensemble des points de coordonnées $(x; y)$ dans le plan $O_{xy}$.

**Exemple 7.1** *Soit la fonction de deux variables $z = \sqrt{x^2 - y^2}$. Pour que $z$ soit définie dans l'ensemble des nombres réels, il faut que : $x^2 - y^2 \geq 0$, c'est-à-dire : $x^2 \geq y^2$, ou encore : $|x| \geq |y|$ On a représenté ce domaine de définition sur la figure 7.1.*

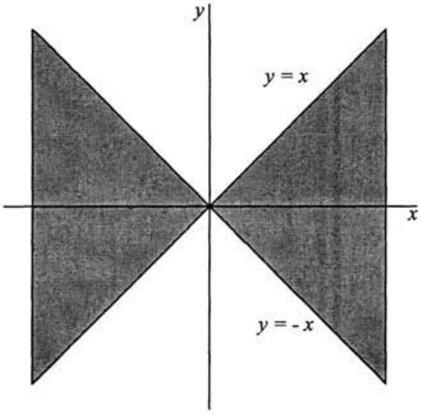



Figure 7.1: Domaine de définition de $z = \sqrt{x^2 - y^2}$

Comme pour les fonctions d'une variable, on peut définir la continuité des fonctions de deux ou de plusieurs variables.

**Définition 7.4** *Une fonction de deux variables $f(x, y)$ est dite* ***continue*** *au point $x = a$, $y = b$ si les trois conditions suivantes sont satisfaites simultanément :*

1. $f(a, b)$ est définie.
2. $\lim\limits_{x \to a, y \to b} f(x, y)$ existe.
3. $\lim\limits_{x \to a, y \to b} f(x, y) = f(a, b)$ quelle que soit la façon dont $x$ et $y$ tendent vers leurs limites respectives $a$ et $b$.

## 7.3 Représentations graphiques des fonctions de deux variables

Soit une fonction de deux variables $z = f(x, y)$. On peut représenter une telle fonction dans un système de coordonnées cartésiennes dans l'espace, noté $O_{xyz}$ : à chaque point $(x_0; y_0)$ du plan $O_{xy}$ en lequel la fonction est bien définie, on associe la valeur $f(x_0, y_0)$ en élevant une perpendiculaire au

plan $O_{xy}$ de longueur égale à la valeur de $f(x_0, y_0)$ (Figure 7.2). On obtient ainsi un point P dont les coordonnées sont : $(x_0; y_0; z_0) = (x_0; y_0; f(x_0, y_0))$. L'ensemble de tous les points P dont les coordonnées satisfont l'équation $z = f(x, y)$ est appelé **graphe** de la fonction de deux variables $f(x, y)$. Ainsi, l'équation $z = f(x, y)$ définit une **surface** dans l'espace.

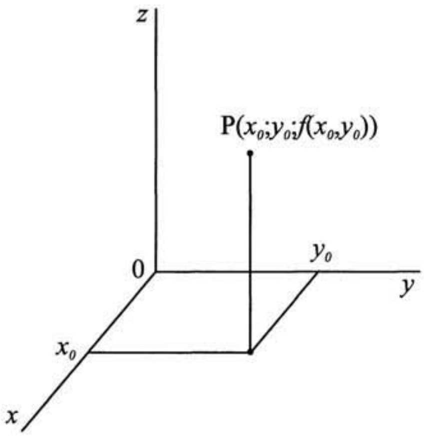



Figure 7.2: Système de coordonnées cartésiennes dans l'espace

**Exemple 7.2** *Représentons graphiquement la fonction de deux variables $z = x^2 + y^2$ dont le graphe porte le nom de paraboloïde de révolution (Figure 7.3).*

*On peut dresser un tableau des valeurs que prend la fonction pour chaque couple $(x; y)$ :*

| $y \backslash x$ | $-2$ | $-1$ | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|---|---|
| $-2$ | 8 | 5 | 4 | 5 | 8 |
| $-1$ | 5 | 2 | 1 | 2 | 5 |
| 0 | 4 | 1 | 0 | 1 | 4 |
| 1 | 5 | 2 | 1 | 2 | 5 |
| 2 | 8 | 5 | 4 | 5 | 8 |

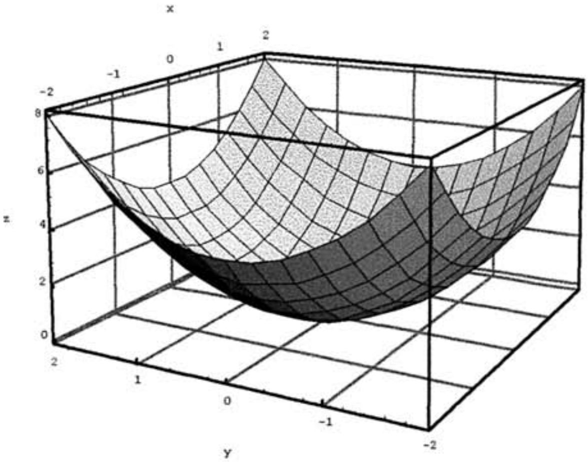



Figure 7.3: Paraboloïde de révolution: $z = x^2 + y^2$

## 7.4 Dérivées partielles

Considérons la fonction de deux variables $z = f(x, y)$.

Si l'on considère $y$ comme une constante, $z$ n'est plus qu'une fonction de $x$ et l'on peut calculer la dérivée de $z$ par rapport à $x$, si elle existe. La dérivée obtenue dans ce cas est la dérivée partielle de $z$ par rapport à $x$ que l'on peut écrire de plusieurs façons :

$$\frac{\partial z}{\partial x},\ \frac{\partial f}{\partial x},\ \frac{\partial}{\partial x}f(x,y),\ f_x(x,y),\ f_x \text{ ou } z_x.$$

La dérivée partielle de $z$ par rapport à $x$ est définie ainsi :

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}$$

lorsque la limite existe et qu'elle est finie.

De manière analogue, si l'on considère $x$ comme une constante, $z$ n'est plus qu'une fonction de $y$ et l'on peut calculer la dérivée de $z$ par rapport à $y$, si elle existe. La dérivée obtenue dans ce cas est la **dérivée partielle** de $z$ par rapport à $y$ que l'on peut écrire :

$$\frac{\partial z}{\partial y},\ \frac{\partial f}{\partial y},\ \frac{\partial}{\partial y}f(x,y),\ f_y(x,y),\ f_y \text{ ou } z_y.$$

**Définition 7.5** *La dérivée partielle de z par rapport à y est définie ainsi :*

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}$$

*lorsque la limite existe et est finie.*

Notons qu'en général une fonction de $n$ variables possède $n$ dérivées partielles, chacune étant prise par rapport à une variable.

**Exemple 7.3** *Soit la fonction de deux variables* $z = 3x^2 + xy - 2y^2$ *(Figure 7.4) ; on peut calculer la dérivée partielle de z par rapport à x et la dérivée partielle de z par rapport à y :*

$\frac{\partial z}{\partial x} = 6x + y$, *y étant considérée comme une constante, la dérivée de* $-2y^2$ *est nulle.*

$\frac{\partial z}{\partial y} = x - 4y$, *x étant considérée comme une constante, la dérivée de* $3x^2$ *est nulle.*

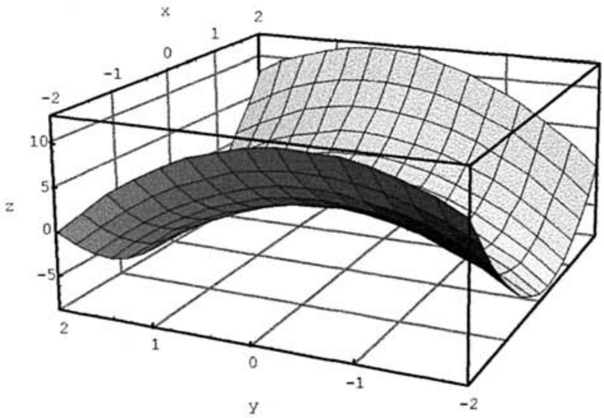



Figure 7.4: Graphe de $z = f(x, y) = 3x^2 + xy - 2y^2$

**Exemple 7.4** *Calculons les deux dérivées partielles de* $z = 5x\ln(1 + 2y)$ *représentée dans la figure 7.5.*

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 5\ln(1 + 2y) \quad et \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{10x}{(1 + 2y)}.$$

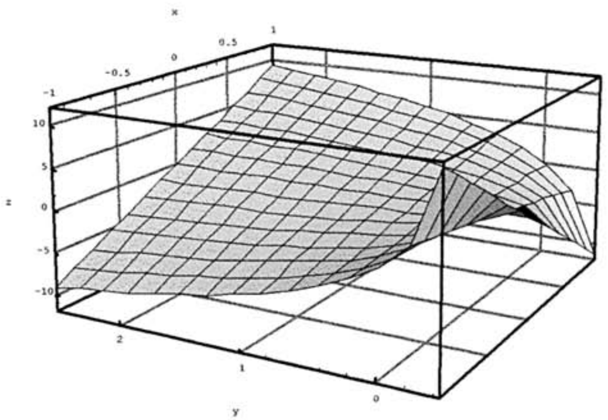



Figure 7.5: Graphe de $z = f(x,y) = 5x\ln(1+2y)$

Puisqu'en général, les dérivées partielles d'une fonction $z = f(x,y)$ sont aussi des fonctions de $x$ et $y$, on peut les dériver partiellement une seconde fois par rapport à $x$ et par rapport à $y$. On appelle ces dérivées les **secondes dérivées partielles** de $z$ et on les note:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = z_{xx} = f_{xx} \\
\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = z_{xy} = f_{xy} \\
\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} &= \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = z_{yy} = f_{yy} \\
\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} &= \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = z_{yx} = f_{yx}
\end{aligned}$$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ signifie qu'on a dérivé deux fois par rapport à $x$.

$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ signifie qu'on a dérivé deux fois par rapport à $y$.

$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ signifie qu'on a dérivé une première fois par rapport à $y$ une seconde fois par rapport à $x$.

$\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ signifie qu'on a dérivé une première fois par rapport à $x$ une seconde fois par rapport à $y$.

De ces quatre dérivées, seules trois sont distinctes puisque, **si elles sont continues** :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}.$$

**Exemple 7.5** *Nous allons calculer les dérivées partielles de premier et second ordre de la fonction :*

$$z = -2x^2 + 3xy^2 - y^3.$$

*La première dérivée partielle de $z$ par rapport à $x$ est :*

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -4x + 3y^2.$$

*Si l'on dérive $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ encore une fois par rapport à $x$, on obtient la seconde dérivée partielle $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ :*

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -4.$$

*Si l'on dérive l'expression $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ par rapport à $y$, on obtient :*

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = 6y.$$

*La première dérivée partielle de $z$ par rapport à $y$ est :*

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 6xy - 3y^2.$$

*Si l'on dérive une nouvelle fois $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ par rapport à $y$, et par rapport à $x$, on obtient :*

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} &= 6x - 6y. \\ \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} &= 6y. \end{aligned}$$

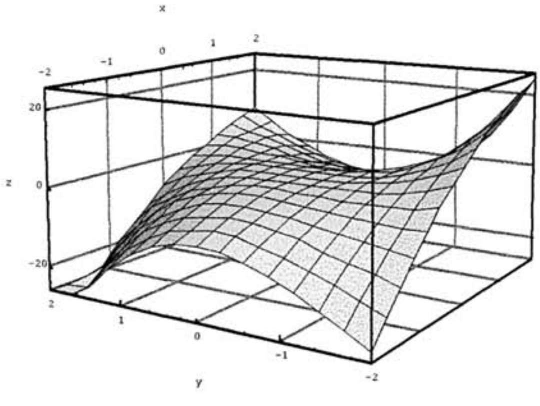



Figure 7.6: Graphe de $z = f(x, y) = -2x^2 + 3xy^2 - y^3$

*Notons que* $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ *est bien identique à* $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$. *Cette fonction est représentée dans la figure 7.6.*

# 7.5 Applications économiques des dérivées partielles

Dans ce paragraphe, nous allons voir deux applications économiques des dérivées partielles : le coût marginal et la productivité marginale.

- **Coût marginal**

  La fonction de coût conjointe :

$$C = Q(x, y)$$

  est définie comme étant le coût de production des quantités $x$ et $y$ de deux biens. Nous pouvons calculer les dérivées partielles de $C$ par rapport à $x$ et par rapport à $y$ :

$$\frac{\partial C}{\partial x} : \quad \text{coût marginal par rapport à } x.$$

$$\frac{\partial C}{\partial y} : \quad \text{coût marginal par rapport à } y.$$

**Exemple 7.6** *Si la fonction de coût conjointe pour produire des quantités $x$ et $y$ de deux biens est :*

$$C = 10 + x^2 + xy + 3y^2 \quad \textit{(Figure 7.7)}$$

*calculons le coût marginal par rapport à $x$ :*

$$\frac{\partial C}{\partial x} = 2x + y$$

*et le coût marginal par rapport à $y$ :*

$$\frac{\partial C}{\partial y} = x + 6y.$$

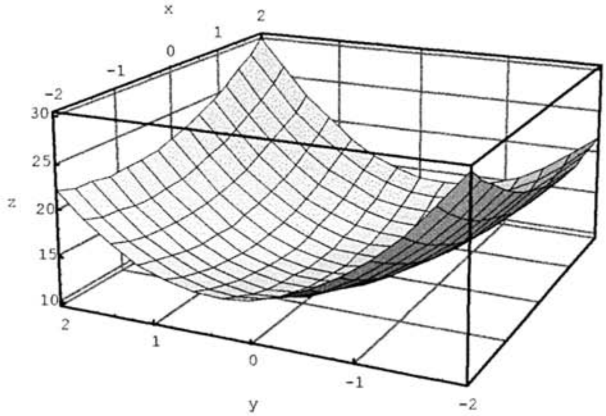



Figure 7.7: Graphe de $C = 10 + x^2 + xy + 3y^2$

- **Productivité marginale**

  Pour produire la plupart des biens, on a besoin d'au moins deux facteurs de production tels que le travail, le capital, la terre, les matériaux ou les machines. Une fonction de production $z = f(x, y)$ signifie qu'une quantité $z$ d'un bien est fabriquée à l'aide des quantités $x$ et $y$ de deux facteurs de production. On peut alors calculer la dérivée partielle de $z$ par rapport à $x$ qui nous donne la **productivité marginale de** $x$ et la dérivée partielle de $z$ par rapport à $y$ qui nous donne la **productivité marginale de** $y$.

**Exemple 7.7** *Si la fonction de production d'un bien est donnée par :*

$$z = 2xy - 3x^2 + y^2 \quad \textit{(Figure 7.8)}$$

*la productivité marginale de $x$ est égale à :*

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2y - 6x$$

*et la productivité marginale de $y$ est égale à :*

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 2x + 2y.$$

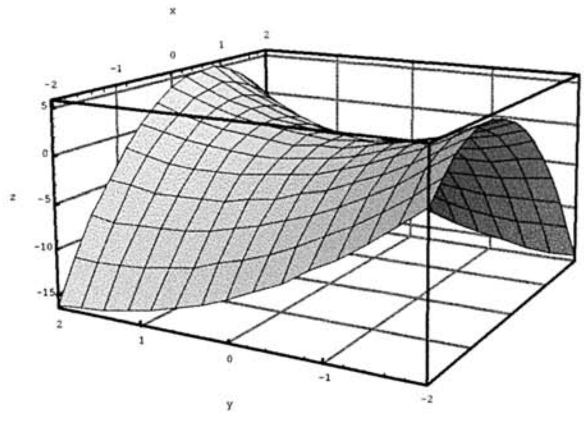



Figure 7.8: Graphe de $z = f(x, y) = 2xy - 3x^2 + y^2$

## 7.6 Minima et maxima d'une fonction de deux variables

Une fonction de deux variables $z = f(x, y)$ présente un maximum au point $P(a; b; f(a, b))$ si $f(a, b)$ a une valeur supérieure à toutes celles que prend $f(x, y)$ au voisinage de $x = a$ et $y = b$ (Figure 7.9(a)). De même, $f(x, y)$ présente un minimum au point $P(a; b; f(a, b))$ si $f(a, b)$ a une valeur inférieure à

toutes celles que prend $f(x, y)$ au voisinage de $x = a$ et $y = b$ (Figure 7.9(b)). Il en résulte qu'il existe un **plan tangent horizontal** au point $(a; b; f(a, b))$. Ce plan tangent est engendré par les deux tangentes déterminées par :

$$\frac{\partial f}{\partial x} \text{ et } \frac{\partial f}{\partial y}.$$

Ainsi, pour que $f(a, b)$ soit un maximum ou un minimum, il faut que les deux équations suivantes soient satisfaites simultanément :

$$1^o \quad \frac{\partial f}{\partial x}(a, b) = 0.$$

$$2^o \quad \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) = 0.$$

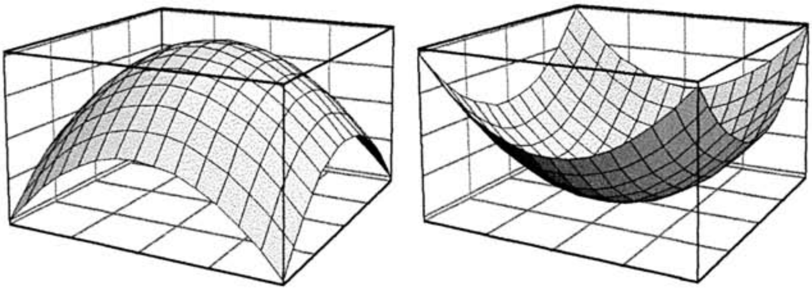


Figure 7.9: (a) maximum, (b) minimum

Cette **condition** est **nécessaire,** mais l'exemple du point-selle montre qu'elle n'est pas suffisante. Bien que les deux tangentes soient horizontales, quel que soit le voisinage du point-selle considéré, on peut toujours trouver un point qui soit au-dessus du point-selle et un autre point qui soit au-dessous du point- selle. Notons qu'à un point-selle, une fonction présente un minimum pour une des variables et un maximum pour l'autre variable (Figure 7.10).

Il faut donc une **condition suffisante** qui est la suivante :

$$\alpha^* = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)^2 > 0.$$

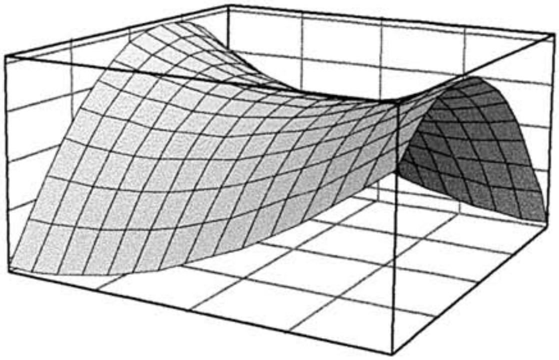


Figure 7.10: Point-selle

Nous admettrons sans démonstration le résultat suivant :

Soit $\mathrm{P}(a;b)$ le point en lequel $\dfrac{\partial f}{\partial x}=0$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}=0$.

$$\left.\begin{array}{lcl}\text{Si} \quad \alpha^* & > & 0\\ \text{et} \quad \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} & > & 0\end{array}\right\} \Rightarrow \text{minimum au point P.}$$

$$\left.\begin{array}{lcl}\text{Si} \quad \alpha^* & > & 0\\ \text{et} \quad \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} & < & 0\end{array}\right\} \Rightarrow \text{maximum au point P.}$$

$$\begin{array}{lcl}\text{Si } \alpha^*=0 & \Rightarrow & \text{on ne peut pas conclure.}\\ \text{Si } \alpha^*<0 & \Rightarrow & \text{ni minimum ni maximum}\\ & & \text{au point P (point-selle).}\end{array}$$

**Exemple 7.8** *Soit* $z=3x^2+2y^2$. *Cherchons les extrema de cette fonction. On a :*

$$\frac{\partial z}{\partial x}=6x \;\; et \;\; \frac{\partial z}{\partial y}=4y.$$

*Annulons ces deux dérivées partielles :*

$$\frac{\partial z}{\partial x} \;=\; 6x=0 \;\Rightarrow\; x=0$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 4y = 0 \;\Rightarrow\; y = 0.$$

*Il y a donc une valeur critique au point $x = y = z = 0$ et cette valeur est un minimum puisque toutes les autres valeurs de $z$ sont positives (Figure 7.11). En effet, comme :*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6, \;\; \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 4 \;\; et \;\; \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0$$

*on a bien :*

$$\alpha^* = 6 \cdot 4 - 0^2 = 24 > 0$$

*et*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6 > 0.$$

*D'après le résultat vu précédemment, il s'agit bien d'un minimum.*

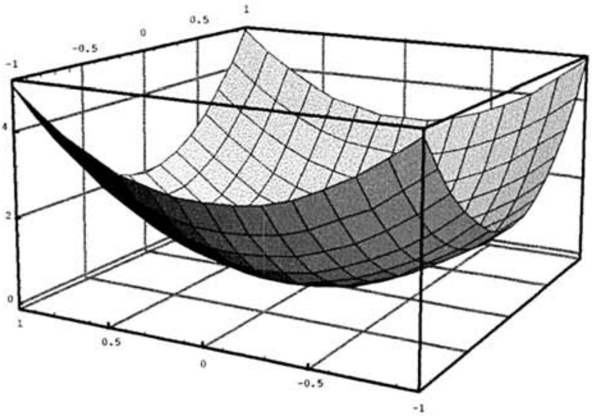



Figure 7.11: Graphe de $z = f(x, y) = 3x^2 + 2y^2$

**Exemple 7.9** *Soit $z = 4x^2 - xy + y^2 - x^3$ (Figure 7.12). On a :*

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 8x - y - 3x^2$$
$$\frac{\partial z}{\partial y} = -x + 2y$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} &= 8-6x\\ \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} &= -1\\ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} &= 2.\end{aligned}$$

*Les valeurs critiques s'obtiennent en résolvant le système d'équations :*

$$8x - y - 3x^2 = 0$$

*et*

$$-x + 2y = 0.$$

*On trouve deux valeurs critiques :*

$$z = 0 \ \textit{pour} \ x = y = 0$$

$$\textit{et} \ \ z = \frac{125}{16} \ \ \textit{pour} \ \ x = \frac{5}{2} \ \ \textit{et} \ \ y = \frac{5}{4}.$$

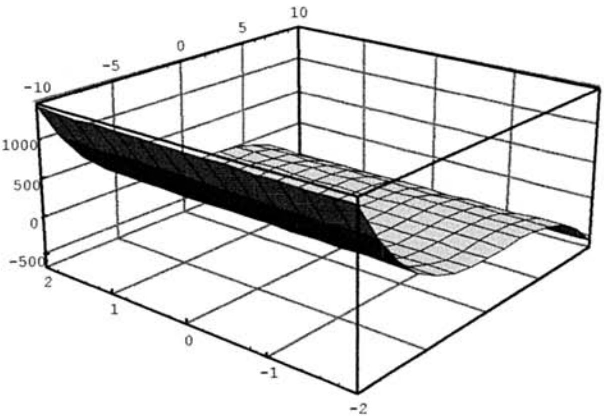



Figure 7.12: Graphe de $z = f(x, y) = 4x^2 - xy + y^2 - x^3$

*La première est une valeur minimale de $z$ puisque quand $x = y = 0$, nous*

*avons :*

$$\alpha^* = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right)^2 = 8 \cdot 2 - (-1)^2 = 15 > 0$$

$$\text{et} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 8 > 0.$$

*Lorsque* $x = \frac{5}{2}$ *et* $y = \frac{5}{4}$, *nous avons :*

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -7, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2 \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -1.$$

*Par conséquent :*

$$\alpha^* = -7 \cdot 2 - (-1)^2 = -15 < 0.$$

*Il s'agit donc d'un point-selle.*

## 7.7 Multiplicateurs de Lagrange

Dans de nombreuses applications pratiques de maximisation ou de minimisation, le problème est de maximiser ou minimiser une fonction donnée assujettie à certaines conditions ou contraintes sur les variables impliquées.

La méthode étudiée ci-après est applicable à n'importe quel nombre de variables et de contraintes. La **méthode des multiplicateurs de Lagrange** est employée pour obtenir un maximum ou un minimum d'une fonction soumise à des **contraintes d'égalité**.

Supposons que $f(x, y)$, appelée fonction objectif, doit être maximisée ou minimisée sous la contrainte $g(x, y) = 0$. Formons une fonction auxiliaire appelée un lagrangien :

$$F(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda g(x, y)$$

où $\lambda$ (multiplicateur de Lagrange) est une inconnue. Pour que cette fonction passe par un extremum, il faut que les trois équations suivantes soient satisfaites simultanément :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F}{\partial x} &= \frac{\partial f}{\partial x} + \lambda \cdot \frac{\partial g}{\partial x} = 0. \\
\frac{\partial F}{\partial y} &= \frac{\partial f}{\partial y} + \lambda \cdot \frac{\partial g}{\partial y} = 0. \\
\frac{\partial F}{\partial \lambda} &= g(x, y) = 0.
\end{aligned}$$

Notons que la troisième équation n'est autre que la contrainte ! Ainsi, $F(x, y, \lambda)$ ne doit être dérivée partiellement que par rapport à $x$ et à $y$. La solution du système de trois équations à trois inconnues ($x$, $y$ et $\lambda$) ci-dessus fournit les points critiques de la fonction sous contrainte. Ces points critiques satisfont la contrainte, mais il reste encore à déterminer s'il s'agit effectivement d'un extremum. Pour cela, on utilisera le résultat suivant :

On a un maximum en $x = a$ ,$y = b$ si $\alpha^* > 0$, $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} < 0$ et $\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} < 0$.

On a un minimum en $x = a$ ,$y = b$ si $\alpha^* > 0$, $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} > 0$ et $\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} > 0$

avec $\alpha^* = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}\right)^2$.

Si $\alpha^* \leq 0$, le test échoue ; il faut examiner la fonction au voisinage de $x, y$.

**Exemple 7.10** *Soient à déterminer les minima et maxima de la fonction objectif* $f(x, y) = 5x^2 + 6y^2 - xy$ *sous la contrainte* $x + 2y = 24$. *Pour cela, construisons la fonction de Lagrange :*

$$F(x, y, \lambda) = 5x^2 + 6y^2 - xy + \lambda(x + 2y - 24)$$

*annulons les premières dérivées partielles :*

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x} &= 10x - y + \lambda = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial y} &= 12y - x + 2\lambda = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial \lambda} &= -x - 2y - 24 = 0 \end{aligned}$$

*éliminons* $\lambda$ *des deux premières équations :*

$$\begin{array}{rrcrcrcl} & 20x & - & 2y & + & 2\lambda & = & 0 \\ - & -x & + & 12y & + & 2\lambda & = & 0 \\ \hline & 21x & - & 14y & & & = & 0 \\ & 3x & - & 2y & & & = & 0 \end{array}$$

*et en résolvant avec la troisième équation :*

$$\begin{array}{rrcrcl} & x & + & 2y & = & 24 \\ + & 3x & - & 2y & = & 0 \\ \hline & 4x & & & = & 24 \end{array}$$

*on obtient* $x = 6$.
*En remplaçant dans* $x + 2y = 24$, *on trouve* $y = 9$. *Le point critique est donc* $(6\,;\,9)$. *On calcule les dérivées partielles de 2^e^ ordre pour vérifier s'il s'agit d'un extremum :*

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} &= 10\\ \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} &= 12\\ \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} &= -1\\ \alpha^* &= 10 \cdot 12 - (-1)^2 = 119.\end{aligned}$$

*Comme* $\alpha^* = 119 > 0$, $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = 10 > 0$, *et* $\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = 12 > 0$, *il s'agit d'un minimum.* $x = 6$ *et* $y = 9$ *est donc la solution qui minimise la fonction objectif tout en respectant la contrainte.*
*On notera que, dans ce cas, la valeur de* $\lambda$ *ne présente pas d'intérêt et n'est donc pas cherchée.*

## 7.8 Applications économiques des multiplicateurs de Lagrange

Il y a beaucoup d'applications économiques des minima et maxima sous contraintes. Par exemple, si un producteur fabrique deux biens, il peut vouloir minimiser le coût total tout en devant fabriquer une quantité totale minimale spécifiée ; une compagnie peut désirer maximiser ses ventes résultant de deux publicités effectuées, tout en observant la contrainte du budget de publicité ; un consommateur peut vouloir maximiser sa fonction d'utilité provenant de la consommation de certains biens, tout en étant restreint par son budget.

**Exemple 7.11** *Un consommateur dépense son revenu de 48 francs pour l'achat de deux biens :* $x$ *et* $y$. *Les prix de* $x$ *et de* $y$ *sont respectivement 2 francs et 3 francs. La fonction d'utilité du consommateur est donnée par la formule :*

$$U = -x^2 - 2y^2 + 2xy.$$

*Combien d'unités du bien $x$ et du bien $y$ doit-il consommer pour maximiser son utilité ?*
*La fonction objectif à maximiser est $U = -x^2 - 2y^2 + 2xy$.*
*La contrainte est $2x + 3y = 48$, ou $2x + 3y - 48 = 0$.*
*Formons la fonction auxiliaire :*

$$F = -x^2 - 2y^2 + 2xy + \lambda(2x + 3y - 48).$$

*On cherche ensuite les dérivées partielles par rapport à $x$, $y$ et $\lambda$ :*

$$\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial x} &= -2x + 2y + 2\lambda \\ \frac{\partial F}{\partial y} &= -4y + 2x + 3\lambda \\ \frac{\partial F}{\partial \lambda} &= -2x - 3y - 48.\end{aligned}$$

*Pour trouver un extremum, on annule ces 3 dérivées partielles :*

$$\begin{aligned}-2x + 2y - 2\lambda &= 0 \\ -4y + 2x - 3\lambda &= 0 \\ -2x - 3y + 48 &= 0\end{aligned}$$

*et en résolvant pour $x$ et $y$, on trouve :*

$$x = \frac{336}{29} \text{ et } y = \frac{240}{29}.$$

*Il s'agit à présent de calculer les dérivées partielles de deuxième ordre afin de déterminer la nature de ce point critique :*

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} &= -2 \\ \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} &= -4 \\ \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} &= 2 \\ \alpha^* &= -2 \cdot -4 - (2)^2 = 4.\end{aligned}$$

*Comme $\alpha^* = 4 > 0$, $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = -2 < 0$, et $\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = -4 < 0$, il s'agit d'un maximum.*

**Exemple 7.12** *Une firme produit des appareils dans deux usines différentes. Les coûts totaux de production pour les deux usines sont respectivement :*

$$\begin{aligned} CT_1 &= 200 + 6q_1 + 0.03q_1^2 \\ CT_2 &= 150 + 10q_2 + 0.02q_2^2 \end{aligned}$$

*où $q_1$ et $q_2$ représentent le nombre d'appareils produits dans chaque usine. La firme s'est engagée à livrer 100 appareils à une entreprise. Les frais de transport par appareil sont de 4 francs pour les livraisons à partir de la première usine et de 2 francs pour les livraisons à partir de la seconde usine. Les frais de transport sont supportés par la firme productive.*
*Calculons le nombre d'appareils que doit produire la firme dans chaque usine afin de minimiser le coût total de production y compris le coût de transport. Le coût total est égal à :*

$$\begin{aligned} CT &= (CT_1 + 4q_1) + (CT_2 + 2q_2) \\ &= 200 + 6q_1 + 0.03q_1^2 + 4q_1 + 150 + 10q_2 + 0.02q_2^2 + 2q_2 \\ &= 0.03q_1^2 + 0.02q_2^2 + 10q_1 + 12q_2 + 350. \end{aligned}$$

*Il s'agit donc de minimiser cette fonction, et cela sous la contrainte de livrer 100 appareils au total, c'est-à-dire $q_1 + q_2 = 100$.*
*La fonction auxiliaire devient par conséquent :*

$$F(q_1, q_2, \lambda) = 0.03q_1^2 + 0.02q_2^2 + 10q_1 + 12q_2 + 350 - \lambda(q_1 + q_2 - 100).$$

*Comme précédemment, on cherche les dérivées partielles de premier ordre :*

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial q_1} &= 0.06q_1 + 10 - \lambda \\ \frac{\partial F}{\partial q_2} &= 0.04q_2 + 12 - \lambda \\ \frac{\partial F}{\partial \lambda} &= 100 - q_1 - q_2. \end{aligned}$$

*Pour trouver le point critique, on les annule :*

$$\begin{aligned} 0.06q_1 + 10 - \lambda &= 0 \\ 0.04q_2 + 12 - \lambda &= 0 \\ q_1 + q_2 - 100 &= 0 \end{aligned}$$

*et en résolvant pour* $q_1$ *et* $q_2$*, on trouve:* $q_1 = 60$ *et* $q_2 = 40$
*Il faut encore vérifier que, pour ces valeurs, il s'agit bien d'un minimum :*

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 F}{\partial q_1^2} &= 0.06 \\
\frac{\partial^2 F}{\partial q_2^2} &= 0.04 \\
\frac{\partial^2 F}{\partial q_1 \partial q_2} &= 0 \\
\alpha^* &= 0.06 \cdot 0.04 - 0 = 0.0024.
\end{aligned}$$

*Comme* $\alpha^*$, $\frac{\partial^2 F}{\partial q_1^2}$ *et* $\frac{\partial^2 F}{\partial q_2^2}$ *sont positifs, il s'agit bien d'un minimum.*
*Par conséquent, quand la firme livre 60 appareils de sa première usine et 40 de sa deuxième usine, le coût total est minimal sous la contrainte d'une livraison de 100 appareils.*

## 7.9 Intégrales doubles et multiples

Dans le chapitre 5, nous avons défini $\int_a^b f(x)dx$ d'une fonction $y = f(x)$ continue sur l'intervalle fini $a \leq x \leq b$. De façon analogue, on peut définir l'**intégrale double**, notée $\int_G \int f(x,y)dxdy$ d'une fonction continue $f(x,y)$ sur une région finie de $G$ du plan $\mathrm{O}_{xy}$.

Nous avons vu que l'intégrale définie de $f(x)$ pouvait s'interpréter en termes d'aires. La **double intégrale définie** peut, quant à elle, être interprétée en termes de **volumes**. Quand $z = f(x,y)$ est positif ou nul sur une région $G$, l'intégrale double $\int_G \int f(x,y)dxdy$ est le volume situé sous la surface $z = f(x,y)$ et au-dessus de la région $G$ dans le plan $\mathrm{O}_{xy}$.

L'évaluation des intégrales doubles se fait par intégrations partielles successives, qui est l'inverse de la dérivation partielle. Ainsi, pour calculer l'intégrale double d'une fonction de deux variables indépendantes, on intègre tout d'abord par rapport à l'une des variables tandis que l'autre variable est considérée comme constante ; le résultat de cette intégration partielle est ensuite intégré par rapport à l'autre variable.

Une intégrale double se calcule en faisant deux intégrations successives :

$$\int_G \int f(x,y)dxdy = \int_{x=a}^{x=b} \left[ \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy \right] dx$$

où $a$ et $b$ sont des constantes. Cette expression représente deux intégrales simples définies et évaluées dans un ordre bien déterminé : $f(x,y)$ est d'abord intégrée partiellement par rapport à $y$ (en prenant $x$ constant), entre les bornes $y_1(x)$ et $y_2(x)$, les limites inférieures, respectivement supérieure de la région $G$ ; le résultat est une fonction de $x$ qui est ensuite intégrée par rapport à $x$ entre les bornes $x = a$ et $x = b$, les points à l'extrême gauche respectivement à l'extrême droite de $G$ (Figure 7.13(a)).

**Remarque** Si l'ordre d'intégration est inversé, de nouvelles bornes d'intégration doivent être déterminées :

$$\int_G \int f(x,y)dxdy = \int_{y=c}^{y=d} \left[ \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)dx \right] dy \quad \text{(Figure 7.13(b).}$$

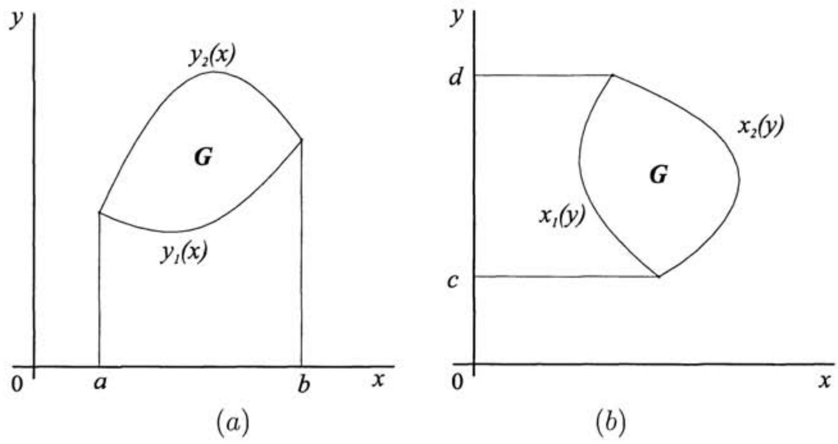



Figure 7.13: Découpages du domaine $G$ d'intégration

Ici, $f(x,y)$ est d'abord intégré partiellement par rapport à $x$, puis par rapport à $y$. On peut montrer que les deux manières d'intégrer conduisent

au même résultat :

$$\int_G\int f(x,y)dxdy = \int_{x=a}^{x=b}\left[\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy\right]dx$$
$$= \int_{y=c}^{y=d}\left[\int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)dx\right]dy.$$

**Exemple 7.13** *Soit à calculer l'intégrale double* $\int_G\int(5x+y)dxdy$, *où* $G$ *est la région limitée par les droites* $x = 1$, $y = 2$ *et* $2x + 3y = 14$ *(Figure 7.14).*

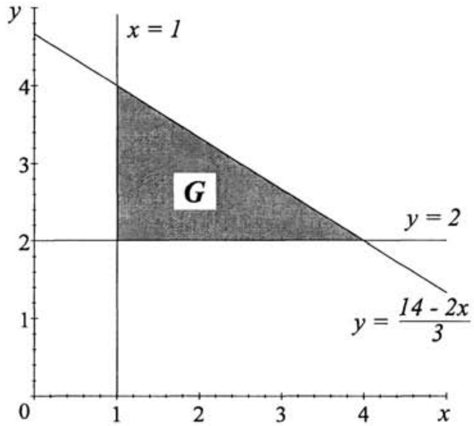



Figure 7.14: Domaine $G$: région limitée par les droites $x = 1$, $y = 2$ et $2x + 3y = 14$

*Pour un* $x$ *fixé, l'intégration en* $y$ *s'effectue à partir de la borne* $y_1 = 2$ *jusqu'à la borne* $y_2 = \frac{14-2x}{3}$. *L'intégration suivant* $x$ *se fait à partir de la borne* $x = 1$ *jusqu'à la borne* $x = 4$. *Ainsi :*

$$\int_G\int(5x+y)dxdy = \int_1^4\left[\int_2^{\frac{14-2x}{3}}(5x+y)dy\right]dx$$
$$= \int_1^4\left(5xy+\frac{y^2}{2}\right)\Bigg|_2^{\frac{14-2x}{3}} dx$$

$$\begin{aligned}
&= \int_1^4 \left[5x\left(\frac{14-2x}{3}\right) + \frac{\left(\frac{14-2x}{3}\right)^2}{2} - 10x - 2\right] dx \\
&= \int_1^4 \left(\frac{70}{3}x - \frac{10}{3}x^2 + \frac{98}{9} - \frac{28}{9}x + \frac{2}{9}x^2 - 10x - 2\right) dx \\
&= \int_1^4 \left(-\frac{28}{9}x^2 + \frac{92}{9}x + \frac{80}{9}\right) dx \\
&= -\frac{28}{27}x^3 + \frac{92}{18}x^2 + \frac{80}{9}x\Big|_1^4 \\
&= -\frac{1792}{27} + \frac{1472}{18} + \frac{320}{9} + \frac{28}{27} - \frac{92}{18} - \frac{80}{9} \\
&= \frac{2052}{54} \\
&= 38.
\end{aligned}$$

*Si l'on intègre d'abord par rapport à $x$, puis par rapport à $y$, les bornes d'intégration deviennent :* $x_1 = 1$, $x_2 = \dfrac{14-3y}{2}$, $y = 2$ *et* $y = 4$.

$$\begin{aligned}
\int_G\int (5x+y)dxdy &= \int_2^4 \left[\int_1^{\frac{14-3y}{2}} (5x+y)dx\right] dy \\
&= \int_2^4 \left(\frac{5x^2}{2} + xy\right)\Big|_1^{\frac{14-3y}{2}} dy \\
&= \int_2^4 \left[\frac{5}{2}\left(\frac{14-3y}{2}\right)^2 + \left(\frac{14-3y}{2}\right)\cdot y - \frac{5}{2} - y\right] dy \\
&= \int_2^4 \left(\frac{245}{2} - \frac{105}{2}y + \frac{45}{8}y^2 + 7y - \frac{3}{2}y^2 - \frac{5}{2} - y\right) dy \\
&= \int_2^4 \left(\frac{33}{8}y^2 - \frac{93}{2}y + 120\right) dy \\
&= -\frac{33}{24}y^3 - \frac{93}{4}y^2 + 120y\Big|_2^4 \\
&= \frac{2112}{24} - \frac{1488}{4} + 480 - \frac{264}{24} + 93 - 240 \\
&= \frac{912}{24} \\
&= 38.
\end{aligned}$$

Le résultat est donc le même si l'on intègre d'abord par rapport à $y$ puis par rapport à $x$, ou si l'on intègre d'abord par rapport à $x$, puis par rapport à $y$. Dans chacun des cas, il faut déterminer soigneusement les bornes d'intégration respectives.

Pour les fonctions de plus de deux variables indépendantes, cette méthode se généralise aisément. On parle alors d'intégrales multiples. Comme dans le cas des intégrales doubles, les intégrales multiples se calculent de l'intérieur vers l'extérieur ; c'est pourquoi, l'ordre dans lequel interviennent les différentes expressions doit être scrupuleusement respecté.

**Exemple 7.14** *Calculons l'intégrale triple suivante :*

$$\begin{aligned}
\int_0^2 \int_0^{x-1} \int_0^{1-x} x \cdot y \cdot z dz dy dx &= \int_0^2 \int_0^{x-1} \left( x \cdot y \cdot \frac{z^2}{2} \bigg|_0^{1-x} \right) dy dx \\
&= \int_0^2 \int_0^{x-1} \frac{1}{2} \cdot x \cdot y (1-x)^2 dy dx \\
&= \int_0^2 \left( \frac{1}{2} \cdot x \cdot (1-x)^2 \cdot \frac{y^2}{2} \bigg|_0^{x-1} \right) dx \\
&= \int_0^2 \frac{1}{4} \cdot x \cdot (1-x)^2 \cdot (x-1)^2 dx \\
&= \frac{1}{4} \int_0^2 (x^5 - 4x^4 + 6x^3 - 4x^2 + x) dx \\
&= \frac{1}{4} \left[ \frac{x^6}{6} - \frac{4x^5}{5} + \frac{6x^4}{4} - \frac{4x^3}{3} + \frac{x^2}{2} \right] \bigg|_0^2 \\
&= \frac{1}{10}.
\end{aligned}$$

**Remarque** Les intégrales multiples trouvent par exemple leurs applications en probabilités et statistiques (espérance mathématique, variance, covariance de plusieurs variables aléatoires), mais ces notions dépassent le cadre de cet ouvrage.

# Exercices

1. Donner les dérivées partielles du premier et du second ordres pour les fonctions de deux variables suivantes :

   (a) $f(x,y) = 2x^3y^4 + \frac{1}{x} - 5$.

   (b) $f(x,y) = \ln(x+y)$.

   (c) $f(x,y) = \sin(x)\cos(y)$.

   (d) $f(x,y) = e^{\sin(x+y)}$.

2. Si la fonction de coût conjointe pour produire des quantités $x$ et $y$ de deux biens est :

$$C = 2x\ln(3+2y).$$

   Calculer le coût marginal par rapport à $x$ et le coût marginal par rapport à $y$.

3. Trouver la productivité marginale de $x$ et la productivité marginale de $y$ pour les fonctions de production suivantes :

   (a) $z = 2x^{1/4}y^{3/8}$.

   (b) $z = xy + 4x^3y^2 - 6x + 3$.

   (c) $z = (xy)^{1/3}$.

4. On appelle courbe de niveau : $f(x,y) = \text{c}$, dans le plan $0_{xy}$. Dessiner les courbes de niveau pour $c = 0, 1, 2, 3, 4$ des fonctions suivantes :

   (a) $f(x,y) = x^2 + y^2$.

   (b) $f(x,y) = xy$.

5. Étudier les minima et maxima des fonctions suivantes :

   (a) $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy$.

   (b) $f(x,y) = x^2 - xy + y^2 + 3x - 2y + 1$.

6. Trouver les extrema de la fonction objectif $f(x,y) = xy$ sous la contrainte $x + y = 1$.

7. La fonction $f(x,y) = x + y$ ne possède pas d'extremum.
En revanche, cette même fonction sous la contrainte $x^2+y^2 = 9$ possède un minimum et un maximum qu'il s'agit de trouver.
Expliquer géométriquement cette situation.

8. Une entreprise fabrique deux types de machines $x$ et $y$. La fonction de coût conjointe est : $f(x,y) = x^2 + 2y^2 - xy$. Combien de machines de chaque type l'entreprise doit-elle fabriquer pour minimiser son coût s'il lui faut un total de 8 machines ?

9. Un consommateur dépense son revenu de 90 francs pour l'achat de deux biens $x$ et $y$. Le prix de $x$ et $y$ est respectivement de 5 francs et de 10 francs. La fonction d'utilité du consommateur est donnée par :

$$U = -x^2 - 2y^2 + xy.$$

Combien d'unités du bien $x$ et du bien $y$ doit-il consommer pour maximiser son utilité ?

10. Soit la fonction :

$$S(a,b) = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i^2 = \sum_{i=1}^{n} (y_i - a - bx_i)^2.$$

Trouver les deux paramètres $a$ et $b$ tels que cette fonction soit minimale. Notons ces deux valeurs estimées par $\hat{a}$ et $\hat{b}$.

11. À l'aide de l'exercice 10, trouver les valeurs estimées des deux paramètres $a$ et $b$, pour les six points ci-dessous :

$$\begin{array}{rcl} (x_1;y_1) &=& (50;5) \\ (x_2;y_2) &=& (53;7) \\ (x_3;y_3) &=& (56;10) \\ (x_4;y_4) &=& (57;12) \\ (x_5;y_5) &=& (55;8) \\ (x_6;y_6) &=& (59;10). \end{array}$$

12. Pour les valeurs de $\hat{a}$ et $\hat{b}$ de l'exercice 11, dessiner la droite $\hat{y} = \hat{a} + \hat{b}x$ ainsi que les 6 points sur le même système d'axes. Calculer la valeur de $S$.




## EULER Leonhard (1707-1783)

Né en avril 1707, à Bâle en Suisse, Leonhard Euler conclut ses études de philosophie en 1723. Il étudie la théologie, le grec et l'hébreux. Grâce à son mentor Johann Bernoulli, il réussit à convaincre son père de le laisser poursuivre ses études en mathématiques, il les termine en 1726. En 1730, il est nommé professeur de physique à l'Académie des Sciences de St Petersbourg. Après le départ de D. Bernoulli en 1733, Euler reprend la responsabilité de la chaire des mathématiques de l'Académie. Les domaines d'application de ses projets sont vastes: de la cartographie à la science de l'éducation, des pompes incendie à l'étude des moteurs etc. Cependant, le noyau de ses recherches est déjà définitivement déterminé : la théorie des nombres. En 1741, Euler quitte St-Petersbourg pour rejoindre l'Académie des Sciences de Berlin. Durant les 25 ans qu'il a passés à Berlin, Euler a écrit 350 articles, des livres sur le calcul des variations, le calcul des orbites planétaires, sur l'artillerie et la balistique, traitant de la construction des bateaux, sur le mouvement de la lune.

En 1766, Euler décide de retourner à St-Petersbourg, c'est à ce moment-là qu'il perd complétement l'usage de la vue. Ce qui est formidable, c'est qu'il produit plus de la moitié de ses travaux durant cette période, en dépit de sa cécité totale.

# Partie II

# Algèbre linéaire

# Chapitre 8

# Calcul matriciel

## 8.1 Introduction

Dans de nombreuses analyses économiques, les différentes variables sont reliées entre elles par des équations linéaires. L'algèbre linéaire fournit une notation claire et précise pour formuler et résoudre de tels problèmes. Dans ce chapitre, nous allons tout d'abord définir la notion de matrice. Nous nous intéresserons ensuite aux différents types de matrices et aux opérations usuelles telles que l'arithmétique, le calcul du déterminant ou de l'inverse.

## 8.2 Matrices

Une **matrice** est un tableau rectangulaire de nombres réels que l'on peut représenter de la manière suivante :

$$\boldsymbol{A} = (a_{ij}) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Les termes représentés dans le tableau constituent les **éléments** de la matrice. Dans ce livre, un élément sera toujours un **nombre réel**. Un élément est caractérisé par sa valeur et par sa position. Nous désignons les éléments de

la matrice $\boldsymbol{A}$ par la lettre minuscule $a$, munie de deux indices. Donc, $a_{ij}$ est un élément de la matrice $A$ dont $i$ indique le numéro de la ligne et $j$ le numéro de la colonne. Une matrice de $m$ lignes et de $n$ colonnes est dite d'ordre $(m \times n)$. Si le nombre de lignes est égal au nombre de colonnes, la matrice est dite **carrée**. On a alors $m = n$ et on dira simplement que la matrice est d'ordre $n$. Une matrice d'ordre $(m \times 1)$ est appelée **vecteur-colonne** et une matrice d'ordre $(1 \times n)$ est appelée **vecteur-ligne**.

**Exemple 8.1** *La matrice* $\boldsymbol{A}$ *suivante est carrée et d'ordre 3 :*

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} -1 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & -3 \\ 4 & 1 & 5 \end{bmatrix}.$$

**Exemple 8.2** *Les matrices* $\boldsymbol{A}$ *d'ordre* $(4 \times 1)$ *et* $\boldsymbol{B}$ *d'ordre* $(1 \times 2)$ *sont respectivement appelées vecteur colonne et vecteur ligne :*

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{B} = [2 \quad -6].$$

## 8.3 Addition de matrices

Si $\boldsymbol{A}= (a_{ij})$ et $\boldsymbol{B}= (b_{ij})$ sont deux matrices d'ordre $(m \times n)$, leur somme $\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}$ est définie par la matrice :

$$\boldsymbol{C} = (c_{ij}) = \boldsymbol{A} + \boldsymbol{B} = (a_{ij} + b_{ij}).$$

$\boldsymbol{C}= (c_{ij})$ est d'ordre $(m \times n)$ ; chaque élément est la somme des éléments correspondants de $\boldsymbol{A}$ et $\boldsymbol{B}$.

**Exemple 8.3** *Soient les matrices* $\boldsymbol{A}$ *et* $\boldsymbol{B}$ *suivantes :*

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & 5 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 6 & 1 & 9 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

*on obtient :*

$$\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A} + \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 9 & 5 & 11 \\ 3 & 3 & 8 \end{bmatrix}.$$

La somme de deux matrices d'ordre différent n'est pas définie. Si $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ et $\boldsymbol{C}$ sont des matrices de même ordre, alors nous avons :

$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A} \qquad \text{(commutativité)}$$

$$\boldsymbol{A}+(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})=(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})+\boldsymbol{C} \qquad \text{(associativité).}$$

**Exemple 8.4** *Soient les matrices* $\boldsymbol{A}$ *et* $\boldsymbol{B}$ *suivantes :*

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{B}=\begin{bmatrix} 6 & -5 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

*alors :*

$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 6 & -5 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 7 & -6 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}$$

*et*

$$\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 6 & -5 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 7 & -6 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}$$

*donc* $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}$.

**Exemple 8.5** *Soient les matrices* $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$ *suivantes :*
$\boldsymbol{A}+(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})=(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})+\boldsymbol{C}$ *:*

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{B}=\begin{bmatrix} 6 & -5 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{C}=\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

*on obtient :*

$$\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix} 6 & -5 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 6 & -3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$$

*et*

$$\boldsymbol{A}+(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})=\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 6 & -3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 7 & -4 \\ 7 & 5 \end{bmatrix}$$

*on obtient aussi :*

$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 6 & -5 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 7 & -6 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}$$

*et*

$$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})+\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix} 7 & -6 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 7 & -4 \\ 7 & 5 \end{bmatrix}$$

*par conséquent, on voit que :* $\boldsymbol{A}+(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})=(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})+\boldsymbol{C}$.

## 8.4 Multiplication des matrices

Soient $\boldsymbol{A}$ et $\boldsymbol{B}$ deux matrices, le produit $\boldsymbol{AB}$ est défini si et seulement si **le nombre de colonnes de $\boldsymbol{A}$ est égal au nombre de lignes de $\boldsymbol{B}$**. Si $\boldsymbol{A}$ est d'ordre $(m \times n)$ et $\boldsymbol{B}$ d'ordre $(n \times q)$ alors le produit $\boldsymbol{AB}$ est défini par la matrice $\boldsymbol{C}$ d'ordre $(m \times q)$ dont les éléments sont obtenus par :

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} \quad i = 1, \ldots, m \text{ et } j = 1, \ldots, q.$$

Cela signifie que l'on multiplie les éléments de la $i^{\text{e}}$ ligne de $\boldsymbol{A}$ par les éléments correspondants de la $j^{\text{e}}$ colonne de $\boldsymbol{B}$ puis que l'on additionne les résultats.

**Exemple 8.6** *Soient les deux matrices $\boldsymbol{A}$ et $\boldsymbol{B}$ suivantes :*

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \end{bmatrix}.$$

$\boldsymbol{A}$ *est d'ordre* $(2 \times 3)$ *et* $\boldsymbol{B}$ *est d'ordre* $(3 \times 3)$. *Le produit* $\boldsymbol{AB}$ *est donc défini puisque* $\boldsymbol{A}$ *a 3 colonnes et* $\boldsymbol{B}$ *a 3 lignes. Le produit* $\boldsymbol{AB}$ *que nous appellerons* $\boldsymbol{C}$ *est une matrice d'ordre* $(2 \times 3)$.
*L'élément* $c_{11}$ *s'obtient en multipliant les éléments de la première ligne de* $\boldsymbol{A}$ *par les éléments de la première colonne de* $\boldsymbol{B}$ *puis en additionnant les résultats :* $c_{11} = 1 \cdot 1 + 3 \cdot 0 + 0 \cdot 0 = 1$.
*L'élément* $c_{12}$ *s'obtient en multipliant les éléments de la première ligne de* $\boldsymbol{A}$ *par les éléments de la deuxième colonne de* $\boldsymbol{B}$ *puis en additionnant les résultats :* $c_{12} = 1 \cdot 2 + 3 \cdot 2 + 0 \cdot (-1) = 8$.
*On répète la même opération pour tous les éléments* $c_{ij}$. *On obtient la matrice* $\boldsymbol{C}$ *suivante :*

$$\boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} 1 & 8 & 9 \\ -1 & -2 & -1 \end{bmatrix}.$$

Si $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ et $\boldsymbol{C}$ sont trois matrices dont le produit et la somme sont définis, nous avons :

$$\begin{array}{ll} (\boldsymbol{AB}) \cdot \boldsymbol{C} = \boldsymbol{A} \cdot (\boldsymbol{BC}) & \text{(associativité)} \\ \boldsymbol{A} \cdot (\boldsymbol{B} + \boldsymbol{C}) = \boldsymbol{AB} + \boldsymbol{AC} & \text{(distributivité).} \end{array}$$

**Exemple 8.7** *Soient* $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$ *trois matrices carrées d'ordre 2, nous allons vérifier que* $(\boldsymbol{AB})\cdot\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{BC})$ *:*

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 6 & -5 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{AB} &= \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 6 & -5 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -6 \\ 18 & -15 \end{bmatrix} \\
(\boldsymbol{AB})\cdot\boldsymbol{C} &= \begin{bmatrix} 4 & -6 \\ 18 & -15 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -12 & -16 \\ -30 & -24 \end{bmatrix} \\
\boldsymbol{BC} &= \begin{bmatrix} 6 & -5 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -10 & -8 \\ 2 & 8 \end{bmatrix} \\
\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{BC}) &= \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -10 & -8 \\ 2 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -12 & -16 \\ -30 & -24 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

**Exemple 8.8** *Avec les mêmes matrices* $\mathbf{A}$, $\boldsymbol{B}$ *et* $\boldsymbol{C}$ *de l'exemple 8.7, nous vérifions que* $\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C}) = \boldsymbol{AB}+\boldsymbol{AC}$ *:*

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C} &= \begin{bmatrix} 6 & -3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} \\
\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C}) &= \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 6 & -3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -8 \\ 18 & -9 \end{bmatrix} \\
\boldsymbol{AB} &= \begin{bmatrix} 4 & -6 \\ 18 & -15 \end{bmatrix} \quad \textit{(voir exemple 8.7)} \\
\boldsymbol{AC} &= \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ 0 & 6 \end{bmatrix} \\
\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{AC} &= \begin{bmatrix} 4 & -6 \\ 18 & -15 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -2 & -2 \\ 0 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -8 \\ 18 & -9 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

La multiplication de matrices n'est pas commutative,c'est-à-dire qu'en général $\boldsymbol{AB} \neq \boldsymbol{BA}$.

Prenons le cas général avec $\boldsymbol{A}$ d'ordre $(m \times p)$ et $\boldsymbol{B}$ d'ordre $(p \times n)$. Le produit $\boldsymbol{AB}$ est défini ; c'est une matrice d'ordre $(m \times n)$. Qu'en est-il du produit $\boldsymbol{BA}$ ? Il faut distinguer 3 cas :

1. $m \neq n$; le produit $\boldsymbol{BA}$ n'est pas défini. À ce moment-là, $\boldsymbol{AB}$ ne peut pas être égal à $\boldsymbol{BA}$.

2. $m = n$ mais $p \neq n$ ; les deux produits $\boldsymbol{AB}$ et $\boldsymbol{BA}$ sont définis, mais $\boldsymbol{AB}$ est d'ordre $(n \times n)$ et $\boldsymbol{BA}$ est d'ordre $(p \times p)$. Les deux produits ne peuvent donc pas être égaux.

3. $m = n = p$ ; $\boldsymbol{A}$ et $\boldsymbol{B}$ sont deux matrices carrées d'ordre $n$. $\boldsymbol{AB}$ et $\boldsymbol{BA}$ sont aussi carrées d'ordre $n$. Mais, là encore, en général $\boldsymbol{AB} \neq \boldsymbol{BA}$.

**Exemple 8.9** *Reprenons les matrices* $\boldsymbol{A}$ *et* $\boldsymbol{B}$ *de l'exemple 8.4 et regardons si* $\boldsymbol{AB}$ *est égal à* $\boldsymbol{BA}$ *:*

$$\begin{aligned} \boldsymbol{AB} &= \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & -5 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -6 \\ 18 & -15 \end{bmatrix} \\ \boldsymbol{BA} &= \begin{bmatrix} 6 & -5 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -9 & -6 \\ 5 & -2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$\boldsymbol{AB}$ *est différent de* $\boldsymbol{BA}$.

## 8.5 Multiplication d'une matrice par un scalaire

Si $\alpha$ est un scalaire (un scalaire est un nombre réel) et $\boldsymbol{A}$ une matrice, le produit $\alpha\boldsymbol{A}$ est la matrice de même ordre que $\boldsymbol{A}$, obtenue en multipliant chaque élément $(a_{ij})$ de $\boldsymbol{A}$ par $\alpha$ :

$$\alpha\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}\alpha = (\alpha a_{ij}).$$

**Exemple 8.10** *Reprenons la matrice* $\boldsymbol{A}$ *de l'exemple 8.3 et multiplions-la par* $\alpha = 0.7$ *:*

$$\alpha\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}\alpha = 0.7 \begin{bmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.1 & 2.8 & 1.4 \\ 0.7 & 2.1 & 3.5 \end{bmatrix}.$$

Si $\boldsymbol{A}$ et $\boldsymbol{B}$ sont deux matrices de même ordre et $\alpha$ un scalaire, nous avons :

$$\alpha(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}) = \alpha\boldsymbol{A} + \alpha\boldsymbol{B} \quad (\textit{distributivité}).$$

**Exemple 8.11** *Avec* $\boldsymbol{A}$ *et* $\boldsymbol{B}$ *de l'exemple 8.4 et* $\alpha = 0.7$*, nous allons vérifier que* $\alpha(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}) = \alpha\boldsymbol{A}+\alpha\boldsymbol{B}$ *:*

$$
\begin{aligned}
\alpha(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}) &= 0.7\begin{bmatrix} 7 & -6 \\ 5 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4.9 & -4.2 \\ 3.5 & 0.7 \end{bmatrix} \\
\alpha\boldsymbol{A} &= 0.7\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.7 & -0.7 \\ 2.1 & 0 \end{bmatrix} \\
\alpha\boldsymbol{B} &= 0.7\begin{bmatrix} 6 & -5 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4.2 & -3.5 \\ 1.4 & 0.7 \end{bmatrix} \\
\alpha\boldsymbol{A}+\alpha\boldsymbol{B} &= \begin{bmatrix} 0.7 & -0.7 \\ 2.1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4.2 & -3.5 \\ 1.4 & 0.7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4.9 & -4.2 \\ 3.5 & 0.7 \end{bmatrix}.
\end{aligned}
$$

## 8.6 Transposée d'une matrice

La matrice d'ordre $(n \times m)$ obtenue en échangeant les lignes et les colonnes d'une matrice $\boldsymbol{A}$ d'ordre $(m \times n)$ est appelée matrice **transposée** de $\boldsymbol{A}$ et est notée $\boldsymbol{A}'$ (ou parfois $\boldsymbol{A^t}$).

**Exemple 8.12** *La matrice* $\boldsymbol{A}$ *d'ordre* $(2 \times 3)$*, et sa transposée* $\boldsymbol{A}'$ *d'ordre* $(3 \times 2)$ *sont données ci-dessous :*

$$
\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{A}' = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}.
$$

Si $\boldsymbol{A}$ et $\boldsymbol{B}$ sont deux matrices dont la somme et le produit sont définis, il est facile de montrer les relations suivantes :

$$
\begin{aligned}
(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})' &= \boldsymbol{A}'+\boldsymbol{B}'. \\
(\boldsymbol{AB})' &= \boldsymbol{B}'\boldsymbol{A}'. \\
(\boldsymbol{A}')' &= \boldsymbol{A}.
\end{aligned}
$$

**Exemple 8.13** *Reprenons les matrices* $\boldsymbol{A}$ *et* $\boldsymbol{B}$ *de l'exemple 8.4 et vérifions que* $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})' = \boldsymbol{A}'+\boldsymbol{B}'$ *et que* $(\boldsymbol{AB})' = \boldsymbol{B}'\boldsymbol{A}'$.

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B} &= \begin{bmatrix} 7 & -6 \\ 5 & 1 \end{bmatrix} \\
(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})' &= \begin{bmatrix} 7 & 5 \\ -6 & 1 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{A}' &= \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \\
\boldsymbol{B}' &= \begin{bmatrix} 6 & -5 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ -5 & 1 \end{bmatrix} \\
\boldsymbol{A}' + \boldsymbol{B}' &= \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ -5 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 5 \\ -6 & 1 \end{bmatrix} \\
\boldsymbol{AB} &= \begin{bmatrix} 4 & -6 \\ 18 & -15 \end{bmatrix} \\
(\boldsymbol{AB})' &= \begin{bmatrix} 4 & 18 \\ -6 & -15 \end{bmatrix} \\
\boldsymbol{B}'\boldsymbol{A}' &= \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ -5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 18 \\ -6 & -15 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

## 8.7 Différents types de matrices

- **Matrice nulle**

  La matrice dont tous les éléments sont nuls est appelée matrice nulle. Elle sera notée $\boldsymbol{O}$. Lorsque les opérations sont définies, nous avons :

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{A}+\boldsymbol{O} &= \boldsymbol{A} = \boldsymbol{O}+\boldsymbol{A} \\
\boldsymbol{A}-\boldsymbol{A} &= \boldsymbol{O} \\
\boldsymbol{AO} &= \boldsymbol{O} = \boldsymbol{OA}
\end{aligned}$$

  Notons que $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{O}$ n'entraîne pas nécessairement $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{O}$ ou $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{O}$.

**Exemple 8.14** *Soient les matrices* **A** *et* **B** *non nulles suivantes :*

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

*Le produit* **AB** *est nul malgré tout :*

$$\boldsymbol{AB} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

- **Matrice identité**

  Pour toute matrice carrée, les éléments qui ont le même indice pour la ligne et pour la colonne (c'est-à-dire les éléments en position $(i, i)$) forment la **diagonale principale**.

  Une **matrice identité** est une matrice carrée qui a des "1" sur la diagonale principale et des "0" partout ailleurs. On la désigne par la lettre $\boldsymbol{I}$.

**Exemple 8.15** *La matrice identité d'ordre 3 est la suivante:*

$$\boldsymbol{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

- Si nous désignons les éléments de la matrice identité par $u_{ij}$ pour ne pas répéter la lettre minuscule $i$, nous pouvons définir la matrice identité de la sorte:

  $$\begin{array}{lllll} \boldsymbol{I} = (u_{ij}) & \text{avec} & u_{ij} = 1 & \text{si} & i = j \\ & & u_{ij} = 0 & \text{si} & i \neq j. \end{array}$$

  Si $\boldsymbol{A}$ et $\boldsymbol{I}$ sont deux matrices de même ordre, alors on a:

  $$\begin{aligned} \boldsymbol{IA} &= \boldsymbol{AI}{=}\boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{I}^k &= \boldsymbol{I}, \quad k = 1, 2, \ldots, n \end{aligned}$$

**Exemple 8.16**

$$\textit{Soit } \boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \textit{ et } \boldsymbol{I} \textit{ d'ordre 2,}$$

$$\boldsymbol{IA} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} = \boldsymbol{A}.$$

$$\boldsymbol{AI} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} = \boldsymbol{A}.$$

- **Matrice symétrique**

  Une matrice carrée $\boldsymbol{A}$ telle que $\boldsymbol{A}' = \boldsymbol{A}$ est dite matrice symétrique. Ainsi, une matrice carrée $\boldsymbol{A} = (a_{ij})$ est symétrique si $a_{ij} = a_{ji}$ pour tout $i$ et tout $j$, c'est-à-dire ses coefficients sont symétriques par rapport à la diagonale principale.

- **Matrice anti-symétrique**

  Une matrice carrée $\boldsymbol{A}$ telle que $-\boldsymbol{A}'= \boldsymbol{A}$ est dite matrice anti-symétrique, c'est-à-dire si $a_{ij} = -a_{ji}$ pour tout $i$ et $j$ ; il s'ensuit que les éléments de la diagonale principale sont nuls.

- **Matrice scalaire**

  Une matrice carrée $\boldsymbol{A}$ est dite matrice scalaire si :

  $a_{ij} = \beta$ pour $i = j$
  $a_{ij} = 0$ pour $i \neq j$

  où $\beta$ est un scalaire.

- **Matrice diagonale**

  Une matrice carrée $\boldsymbol{A}$ est dite matrice diagonale si :

  $a_{ij} = d_{ij}$ pour $i = j$
  $a_{ij} = 0$ pour $i \neq j$

  où les $d_{ij}$ sont des nombres quelconques.

- **Matrice triangulaire**

  Une matrice carrée $\boldsymbol{A}$ est dite triangulaire (supérieure) si :
  $a_{ij} = 0$ pour $i > j$.

**Exemple 8.17** *Voici un exemple pour chacun des types de matrice carrée vus ci-dessus :*

1. *matrice symétrique :* $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & -2 \end{bmatrix}$.

2. *matrice anti-symétrique :* $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$.

3. *matrice scalaire :* $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} = 6\boldsymbol{I}$.

4. *matrice diagonale :* $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$.

*5. matrice triangulaire :* $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} -1 & -3 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$

## 8.8 Trace d'une matrice carrée

La trace d'une matrice carrée est la **somme des éléments de la diagonale principale**. Si $\boldsymbol{A}$ est une matrice carrée d'ordre $n$, on définit la trace de $\boldsymbol{A}$ comme suit :

$$tr(\boldsymbol{A}) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}.$$

**Exemple 8.18** *La trace de la matrice* $\boldsymbol{A}$ *d'ordre 3 suivante :*

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

*est*

$$tr(\boldsymbol{A}) = a_{11} + a_{22} + a_{33} = 1 + 1 + 0 = 2.$$

Si $\boldsymbol{A}$ et $\boldsymbol{B}$ sont deux matrices carrées, alors nous avons :

$$\begin{aligned} tr(\boldsymbol{A}') &= tr(\boldsymbol{A}) \\ tr(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}) &= tr(\boldsymbol{A}) + tr(\boldsymbol{B}). \end{aligned}$$

Si $\boldsymbol{A}$ est d'ordre $(m \times n)$ et $\boldsymbol{B}$ d'ordre $(n \times m)$, alors nous avons :

$$tr(\boldsymbol{AB}) = tr(\boldsymbol{BA})$$

**Exemple 8.19** *Avec la même matrice* $\boldsymbol{A}$ *que dans l'exemple 8.18, nous avons :*

$$\boldsymbol{A}' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} tr(\boldsymbol{A}') &= 1 + 1 + 0 = 2. \\ tr(\boldsymbol{A}) &= 2. \end{aligned}$$

**Exemple 8.20** *Avec les matrices* $\boldsymbol{A}$ *et* $\boldsymbol{B}$ *de l'exemple 8.4, nous allons vérifier que tr(*$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$*)=tr(*$\boldsymbol{A}$*)+tr(*$\boldsymbol{B}$*) :*

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B} &= \begin{bmatrix} 7 & -6 \\ 5 & 1 \end{bmatrix} \\
tr(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}) &= 7+1=8 \\
\boldsymbol{A} &= \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}, \quad tr(\boldsymbol{A}) = 1+0=1 \\
\boldsymbol{B} &= \begin{bmatrix} 6 & -5 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad tr(\boldsymbol{B}) = 6+1=7 \\
tr(\boldsymbol{A})+tr(\boldsymbol{B}) &= 1+7=8.
\end{aligned}$$

**Exemple 8.21** *Soient la matrice* $\boldsymbol{A}$ *d'ordre* $(2 \times 3)$ *et la matrice* $\boldsymbol{B}$ *d'ordre* $(3 \times 2)$ *suivantes :*

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

*Nous allons vérifier que tr(*$\boldsymbol{AB}$*)= tr(*$\boldsymbol{BA}$*) :*

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{AB} &= \begin{bmatrix} 0 & -3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \\
tr(\boldsymbol{AB}) &= 0-1=-1. \\
\boldsymbol{BA} &= \begin{bmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 3 & -1 \end{bmatrix} \\
tr(\boldsymbol{BA}) &= -1+1-1=-1.
\end{aligned}$$

## 8.9 Partition des matrices

Si l'on trace entre certaines lignes et/ou certaines colonnes d'une matrice $\boldsymbol{A}$ des traits sur toute la longueur de ces lignes ou de ces colonnes, on fait apparaître de nouvelles matrices dont les dimensions sont inférieures à la dimension de $\boldsymbol{A}$. Elles sont appelées **sous-matrices** de $\boldsymbol{A}$ ou **blocs**.

**Exemple 8.22** *Si nous prenons une matrice* $\boldsymbol{A}$ *d'ordre* $(3\times4)$*, nous pouvons la partager par exemple en 4 blocs comme suit :*

$$\boldsymbol{A}=\left[\begin{array}{cc|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ \hline a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{array}\right].$$

*Si on désigne les blocs par :*

$$\boldsymbol{B}=\left[\begin{array}{cc} a_{11} & a_{12} \end{array}\right] \quad \boldsymbol{C}=\left[\begin{array}{cc} a_{13} & a_{14} \end{array}\right]$$

$$\boldsymbol{D}=\left[\begin{array}{cc} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{array}\right] \quad \boldsymbol{E}=\left[\begin{array}{cc} a_{23} & a_{24} \\ a_{33} & a_{34} \end{array}\right]$$

*on peut représenter la matrice* $\boldsymbol{A}$ *ainsi :*

$$\boldsymbol{A}=\left[\begin{array}{cc} \boldsymbol{B} & \boldsymbol{C} \\ \boldsymbol{D} & \boldsymbol{E} \end{array}\right].$$

Une telle matrice est appelée **matrice partagée** (partitionnée). Il est évident que la division d'une matrice en blocs n'est pas unique. Dans l'exemple 8.22, nous avons 4 blocs ou "deux lignes de blocs" et "deux colonnes de blocs". Ces lignes et ces colonnes sont appelées respectivement **grandes lignes** et **grandes colonnes** de la matrice $\boldsymbol{A}$.

En général, si $\boldsymbol{A}$ est une matrice d'ordre $(m \times n)$ divisée en $p$ grandes lignes et $q$ grandes colonnes, nous désignons le bloc de la $i^{\text{e}}$ grande ligne et de la $j^{\text{e}}$ grande colonne par $\boldsymbol{A}_{\mathbf{ij}}$. Nous avons alors la représentation suivante de $\boldsymbol{A}$ :

$$\boldsymbol{A}=\left[\begin{array}{cccc} \boldsymbol{A}_{\mathbf{11}} & \boldsymbol{A}_{\mathbf{12}} & \ldots & \boldsymbol{A}_{\mathbf{1q}} \\ \boldsymbol{A}_{\mathbf{21}} & \boldsymbol{A}_{\mathbf{22}} & \ldots & \boldsymbol{A}_{\mathbf{2q}} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \boldsymbol{A}_{\mathbf{p1}} & \boldsymbol{A}_{\mathbf{p2}} & \ldots & \boldsymbol{A}_{\mathbf{pq}} \end{array}\right].$$

- **Addition de matrices partagées**

  Si $\boldsymbol{A}$ et $\boldsymbol{B}$ sont deux matrices du même ordre et partagées de la même façon en $p$ grandes lignes et $q$ grandes colonnes, la somme de $\boldsymbol{A}$ et $\boldsymbol{B}$ se fait en sommant les blocs correspondants :

$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=[\boldsymbol{A}_{\mathbf{ij}}]+[\boldsymbol{B}_{\mathbf{ij}}]=[\boldsymbol{A}_{\mathbf{ij}}+\boldsymbol{B}_{\mathbf{ij}}] \quad \text{pour} \quad \begin{array}{l} i=1,2,\ldots,p \\ j=1,2,\ldots,q. \end{array}$$

**Exemple 8.23** *Soient les deux matrices d'ordre* $(3 \times 3)$ $\boldsymbol{A}$ *et* $\boldsymbol{B}$ *suivantes :*

$$\boldsymbol{A} = \left[\begin{array}{rr|r} -2 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -3 \\ \hline 3 & 1 & 4 \end{array}\right] \qquad \boldsymbol{B} = \left[\begin{array}{rr|r} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ \hline 2 & 2 & -2 \end{array}\right]$$

*on obtient :*

$$\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B} = \left[\begin{array}{c|c} \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ \hline \begin{bmatrix} 3 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 2 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 \end{bmatrix} \end{array}\right]$$

$$= \left[\begin{array}{rr|r} -2 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -2 \\ \hline 5 & 3 & 2 \end{array}\right].$$

- **Multiplication de matrices partagées**

  Pour que deux matrices partagées $\boldsymbol{A}$ et $\boldsymbol{B}$ puissent être multipliées, il faut que les deux conditions suivantes soient vérifiées :

  1. le nombre de grandes colonnes de $\boldsymbol{A}$ est égal au nombre de grandes lignes de $\boldsymbol{B}$ ;
  2. le nombre de colonnes du $t^{\text{e}}$ bloc d'une grande ligne quelconque de $\boldsymbol{A}$ est égal au nombre de lignes du $t^{\text{e}}$ bloc d'une grande colonne quelconque de $\boldsymbol{B}$.

  Si $\boldsymbol{A}$ est partagée en $(p \times q)$ blocs et $\boldsymbol{B}$ en $(q \times s)$ blocs, c'est-à-dire

  si $\boldsymbol{A} = [\boldsymbol{A}_{\text{ij}}]$ pour $i = 1, 2, \ldots, p$, $j = 1, 2, \ldots, q$

  et $\boldsymbol{B} = [\boldsymbol{B}_{\text{ij}}]$ pour $i = 1, 2, \ldots, q$, $j = 1, 2, \ldots, s$

  alors le produit $\boldsymbol{AB}$ est défini par :

  $$\boldsymbol{AB} = \left[\sum_{t=1}^{q} \boldsymbol{A}_{\text{it}} \boldsymbol{B}_{\text{tj}}\right] \quad \text{pour} \quad i = 1, 2, \ldots, p \quad j = 1, 2, \ldots, s.$$

  Le résultat $\boldsymbol{AB}$ est une matrice partagée en $(p \times s)$ blocs.

**Exemple 8.24** *Reprenons les matrices* $\boldsymbol{A}$ *et* $\boldsymbol{B}$ *de l'exemple 8.23 et calculons le produit* $\boldsymbol{AB}$ *:*

$$\boldsymbol{A} = \left[\begin{array}{cc|c} -2 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -3 \\ \hline 3 & 1 & 4 \end{array}\right] \qquad \boldsymbol{B} = \left[\begin{array}{cc|c} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ \hline 2 & 2 & -2 \end{array}\right].$$

*La première condition est remplie car le nombre de grandes colonnes de* $\boldsymbol{A}$ *est égal au nombre de grandes lignes de* $\boldsymbol{B}$*. Pour vérifier la deuxième condition, notons les blocs de* $\boldsymbol{A}$ *et de* $\boldsymbol{B}$ *par leurs indices respectifs :*

$$\begin{array}{ll} \boldsymbol{A}_{11} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} & \boldsymbol{A}_{12} = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix} \\ \boldsymbol{A}_{21} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \end{bmatrix} & \boldsymbol{A}_{22} = \begin{bmatrix} 4 \end{bmatrix} \\ \boldsymbol{B}_{11} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} & \boldsymbol{B}_{12} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ \boldsymbol{B}_{21} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \end{bmatrix} & \boldsymbol{B}_{22} = \begin{bmatrix} -2 \end{bmatrix}. \end{array}$$

*Nous devons multiplier* $\boldsymbol{A}_{11}$ *par* $\boldsymbol{B}_{11}$ *et par* $\boldsymbol{B}_{12}$*. Il faut donc que le nombre de colonnes de* $\boldsymbol{A}_{11}$ *soit égal au nombre de lignes de* $\boldsymbol{B}_{11}$ *et de* $\boldsymbol{B}_{12}$*. C'est le cas puisqu'on a* $2 = 2 = 2$.
*Nous devons multiplier* $\boldsymbol{A}_{12}$ *par* $\boldsymbol{B}_{21}$ *et par* $\boldsymbol{B}_{22}$*. Il faut donc que le nombre de colonnes de* $\boldsymbol{A}_{12}$ *soit égal au nombre de lignes de* $\boldsymbol{B}_{21}$ *et de* $\boldsymbol{B}_{22}$*. C'est le cas puisqu'on a* $1 = 1 = 1$.
*Nous devons multiplier* $\boldsymbol{A}_{21}$ *par* $\boldsymbol{B}_{11}$ *et par* $\boldsymbol{B}_{12}$*. Nous pouvons le faire puisque* $\boldsymbol{A}_{21}$ *a 2 colonnes et* $\boldsymbol{B}_{11}$ *et* $\boldsymbol{B}_{12}$ *ont 2 lignes.*
*Et finalement nous devons multiplier* $\boldsymbol{A}_{22}$ *par* $\boldsymbol{B}_{21}$ *et par* $\boldsymbol{B}_{22}$*. Nous pouvons le faire car* $\boldsymbol{A}_{22}$ *a 1 colonne et* $\boldsymbol{B}_{21}$ *et* $\boldsymbol{B}_{22}$ *ont 1 ligne. Le produit* $\boldsymbol{AB}$ *est donc possible et le résultat est le suivant :*

$$\begin{aligned} \boldsymbol{AB} &= \left[\begin{array}{c|c} \boldsymbol{A}_{11}\boldsymbol{B}_{11} + \boldsymbol{A}_{12}\boldsymbol{B}_{21} & \boldsymbol{A}_{11}\boldsymbol{B}_{12} + \boldsymbol{A}_{12}\boldsymbol{B}_{22} \\ \hline \boldsymbol{A}_{21}\boldsymbol{B}_{11} + \boldsymbol{A}_{22}\boldsymbol{B}_{21} & \boldsymbol{A}_{21}\boldsymbol{B}_{12} + \boldsymbol{A}_{22}\boldsymbol{B}_{22} \end{array}\right] \\ &= \left[\begin{array}{c|c} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ -6 & -6 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -4 \\ 6 \end{bmatrix} \\ \hline \begin{bmatrix} 1 & -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 8 & 8 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -8 \end{bmatrix} \end{array}\right] \end{aligned}$$

$$= \left[\begin{array}{cc|c} 5 & 7 & -3 \\ -7 & -7 & 5 \\ \hline 9 & 6 & -7 \end{array}\right].$$

- **Transposée d'une matrice partagée**

  La transposée d'une matrice partagée $\boldsymbol{A} = [\boldsymbol{A}_{\mathrm{ij}}]$ est égale à la transposée de ses blocs dans l'ordre transposé :

$$\boldsymbol{A}' = [(\boldsymbol{A}_{\mathrm{ji}})'].$$

**Exemple 8.25** *Si l'on reprend la matrice de l'exemple 8.22 :*

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{B} & \boldsymbol{C} \\ \boldsymbol{D} & \boldsymbol{E} \end{bmatrix}$$

*sa transposée est égale à :*

$$\boldsymbol{A}' = \begin{bmatrix} \boldsymbol{B}' & \boldsymbol{D}' \\ \boldsymbol{C}' & \boldsymbol{E}' \end{bmatrix}.$$

## 8.10 Déterminant d'une matrice

À chaque matrice **carrée,** on peut associer un nombre qui s'appelle son déterminant. On le désigne par l'expression $Det(\boldsymbol{A})$ ou par $\mid A \mid$. Nous allons commencer par deux cas particuliers : le déterminant d'une matrice $(2 \times 2)$ et le déterminant d'une matrice $(3 \times 3)$.

Le déterminant d'une matrice d'ordre 2 est égal à la différence du produit croisé de ses éléments :

$$\mid \boldsymbol{A} \mid = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}.$$

**Exemple 8.26** *Le déterminant de la matrice :*

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$$

*est :*

$$\mid \boldsymbol{A} \mid = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot 0 - (-1) \cdot 3 = 3.$$

Pour calculer le déterminant d'une matrice d'ordre 3, on répète les deux premières colonnes à côté de la matrice. On effectue la somme des produits des éléments de chaque diagonale tournée dans le même sens que la diagonale principale et on enlève les produits des éléments de chaque diagonale de sens contraire. Cela donne :

$$\left|\begin{array}{ccc|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array}\right.$$

$$\begin{aligned} \mid \boldsymbol{A} \mid &= a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32} \\ &\quad -(a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} + a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32} + a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33}). \end{aligned}$$

**Exemple 8.27** *Le déterminant de la matrice*

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \end{bmatrix}$$

*est :*

$$\begin{aligned} \mid \boldsymbol{A} \mid &= 1 \cdot 2 \cdot (-2) + 2 \cdot 3 \cdot 0 + 0 \cdot 0 \cdot (-1) \\ &\quad -0 \cdot 2 \cdot 0 - 1 \cdot 3 \cdot (-1) - 2 \cdot 0 \cdot (-2) = -1. \end{aligned}$$

Pour calculer le déterminant d'une matrice d'ordre $n$, il faut introduire quelques notions sur les permutations.

On dit que les entiers $1, \ldots, n$ sont dans un **ordre naturel** lorsqu'ils apparaissent dans l'ordre $1, 2, 3, \ldots, n$. Deux entiers ne sont pas dans l'ordre naturel dans un ensemble de $n$ entiers si le plus grand précède le plus petit. Par exemple, l'ordre naturel des 5 premiers entiers, commençant par 1, est $(1, 2, 3, 4, 5)$. Si l'on inverse la position des entiers 2 et 4, nous obtenons $(1, 4, 3, 2, 5)$ et l'ensemble n'est plus un ordre naturel, parce que 4 précède 3 et 2, 3 précède 2.

On appelle **permutation** de $n$ entiers tout arrangement de ces $n$ entiers. Le nombre d'**inversions** dans une permutation de $n$ entiers est le nombre de paires d'éléments (non nécessairement adjacents) dans lesquelles le grand entier précède le petit. Dans l'exemple donné précédemment, nous avons 3 inversions : $(4, 3)$, $(4, 2)$ et $(3, 2)$. Notons que le nombre d'inversions dans toute permutation est unique et peut être compté directement et systématiquement. Une permutation est dite **paire** si le nombre d'inversions de cette permutaion est pair. Elle est dite **impaire** si le nombre d'inversions est impair.

- **Définition du déterminant**

  Le **déterminant** d'une matrice $\boldsymbol{A}$ d'ordre $n$, noté $|\boldsymbol{A}|$, est le nombre calculé à partir de la somme suivante :

$$|\boldsymbol{A}| = \sum(\pm)a_{1i}a_{2j}\dots a_{nr}$$

  La somme est prise sur toutes les permutations du second indice. On assigne à un terme le signe plus si $(i, j, ..., r)$ est une permutation paire de $(1, ..., n)$ et le signe moins si c'est une permutation impaire.

**Exemple 8.28** *Pour une matrice d'ordre 3, nous avons les caractéristiques suivantes :*

| ***Permutations*** | ***Nombre d'inversions*** | ***Parité*** |
|---|---|---|
| *1,2,3* | *0* | *paire* |
| *2,3,1* | *2* | *paire* |
| *3,1,2* | *2* | *paire* |
| *1,3,2* | *1* | *impaire* |
| *2,1,3* | *1* | *impaire* |
| *3,2,1* | *3* | *impaire* |

*Le déterminant est alors :*

$$\begin{array}{rcl} |\boldsymbol{A}| & = & a_{1(1)} \cdot a_{2(2)} \cdot a_{3(3)} + a_{1(2)} \cdot a_{2(3)} \cdot a_{3(1)} + a_{1(3)} \cdot a_{2(1)} \cdot a_{3(2)} \\ & - & a_{1(1)} \cdot a_{2(3)} \cdot a_{3(2)} - a_{1(2)} \cdot a_{2(1)} \cdot a_{3(3)} - a_{1(3)} \cdot a_{2(2)} \cdot a_{3(1)}. \end{array}$$

**Exemple 8.29** *Soit la matrice* $\mathbf{A}$ *suivante :*

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & 6 & 4 \\ -1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

*son déterminant est :*

$$\begin{array}{rcl} |\boldsymbol{A}| & = & (2 \cdot 6 \cdot 2) + (3 \cdot 4 \cdot (-1)) + ((-1) \cdot 0 \cdot 2) \\ & & -(2 \cdot 4 \cdot 2) - (3 \cdot 0 \cdot 2) - ((-1) \cdot 6 \cdot (-1)) \\ & = & 24 - 12 - 16 - 6 = -10. \end{array}$$

- **L'expansion du déterminant par les cofacteurs**

  Nous reprenons le déterminant de la matrice $\boldsymbol{A}$ ci-dessus :

$$\begin{array}{l} a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32} \\ -(a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32} + a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33} + a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31}). \end{array}$$

  Considérons maintenant les deux termes qui contiennent l'élément :

$$\begin{array}{lll} a_{11} & : & a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} - a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32} \quad \text{que nous pouvons écrire} \\ & & a_{11} \cdot (a_{22} \cdot a_{33} - a_{23} \cdot a_{32}). \end{array}$$

  Les termes entre parenthèses représentent le **cofacteur** de l'élément $a_{11}$. On notera qu'il ne contient aucun élément de la première ligne et aucun élément de la première colonne. Nous représentons le cofacteur de $a_{11}$ par $A_{11}$.

  Considérons maintenant les deux termes du déterminant contenant le $2^{\text{ème}}$ élément de la première ligne de $\boldsymbol{A}$ :

$$\begin{aligned} a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} - a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33} &= a_{12}(a_{23} \cdot a_{31} - a_{21} \cdot a_{33}) \\ &= a_{12} \cdot A_{12}. \end{aligned}$$

  De même, pour le troisième élément de la première ligne de $\boldsymbol{A}$ :

$$\begin{aligned} a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32} - a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} &= a_{13}(a_{21} \cdot a_{32} - a_{22} \cdot a_{31}) \\ &= a_{13} \cdot A_{13}. \end{aligned}$$

  Notons que tous les termes du déterminant ont été utilisés, nous pouvons donc écrire :

$$\mid \boldsymbol{A} \mid = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} = \sum_{j=1}^{3} a_{ij}A_{ij}.$$

  Le même raisonnement peut être répété pour toutes les lignes ainsi que toutes les colonnes de $\boldsymbol{A}$.

**Exemple 8.30** *Calculons le déterminant de la matrice* $\boldsymbol{A}$ *suivante :*

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & 6 & 4 \\ -1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

*par la première ligne* :

$$\begin{aligned} \mid \boldsymbol{A} \mid &= a_{11} \cdot A_{11} + a_{12} \cdot A_{12} + a_{13} \cdot A_{13} \\ &= 2 \cdot (12-8) - 3 \cdot (0-(-4)) - 1 \cdot (0-(-6)) = -10 \end{aligned}$$

*par la première colonne :*

$$\begin{aligned} \mid \boldsymbol{A} \mid &= a_{11} \cdot A_{11} + a_{21} \cdot A_{21} + a_{31} \cdot A_{31} \\ &= 2 \cdot (12-8) + 0 + (-1) \cdot (12-(-6)) = -10. \end{aligned}$$

Le cofacteur $A_{ij}$ de l'élément $a_{ij}$ est égal au déterminant de la sous-matrice obtenue de la matrice originale lorsqu'on a éliminé la $i^{\mathrm{e}}$ ligne et la $j^{\mathrm{e}}$ colonne, multiplié par $(-1)^{i+j}$.

**Exemple 8.31** *Reprenons la matrice* $\boldsymbol{A}$ *de l'exemple 8.30 et calculons le déterminant par la 2ème colonne à l'aide de la définition des cofacteurs :*

$$\begin{aligned} \mid \boldsymbol{A} \mid &= a_{12} \cdot A_{12} + a_{22} \cdot A_{22} + a_{32} \cdot A_{32} \\ &= (-1)^{(1+2)} \cdot 3 \cdot (0-(-4)) + (-1)^{(2+2)} \cdot 6(4-1) \\ &\quad +(-1)^{(3+2)} \cdot 2(8-0) \\ &= -3 \cdot (4) + 6 \cdot (3) - 2 \cdot (8) = -10. \end{aligned}$$

Nous allons voir maintenant quelques propriétés des déterminants qui vont nous permettre de les calculer beaucoup plus facilement.

## 8.11 Propriétés du déterminant

**Propriété 1**

$Det\,(\boldsymbol{A}) = Det\,(\boldsymbol{A}')$.

Pour vérifier cette propriété, il suffit de noter que l'expansion du déterminant par une des lignes de $\boldsymbol{A}'$ est égale à l'expansion par la colonne correspondante de $\boldsymbol{A}$. L'importance de ce résultat est que toutes les propriétés que nous verrons par la suite à propos des lignes seront valables aussi pour les colonnes.

**Propriété 2**

Si l'on échange deux lignes de la matrice $\boldsymbol{A}$, le déterminant change de signe.

**Propriété 3**

Si la matrice possède deux lignes identiques, le déterminant est égal à zéro.

**Propriété 4**

Si l'on multiplie une ligne de la matrice $\boldsymbol{A}$ par le scalaire $\beta$, le déterminant est lui aussi multiplié par $\beta$.

**Propriété 5**

Si tous les éléments d'une ligne d'une matrice $\boldsymbol{A}$ sont nuls, le déterminant est égal à zéro.

**Propriété 6**

Si, aux éléments d'une ligne de la matrice $\boldsymbol{A}$, on ajoute un multiple quelconque des éléments correspondants d'une autre ligne de $\boldsymbol{A}$, le déterminant reste inchangé.

**Propriété 7**

Le déterminant d'une matrice triangulaire est égal au produit des éléments de la diagonale principale.

**Propriété 8**

Le déterminant d'une matrice diagonale est égal au produit des éléments de la diagonale principale. À partir de cette propriété, on peut en déduire que le déterminant d'une matrice identité (quel que soit son ordre) est égal à 1.

**Propriété 9**

Soient $\boldsymbol{A}$ et $\boldsymbol{B}$ deux matrices carrées d'ordre $n$, le déterminant du produit des deux matrices est égal au produit des déterminants des deux matrices :

$Det\,(\boldsymbol{AB}) = Det\,(\boldsymbol{A}) \cdot Det\,(\boldsymbol{B})$.

## 8.12 Inverse d'une matrice

Si $\boldsymbol{A}$ et $\boldsymbol{B}$ sont deux matrices carrées telles que $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{BA} = \boldsymbol{I}$ alors $\boldsymbol{B}$ est dite matrice inverse de $\boldsymbol{A}$ et l'on note $\boldsymbol{B}$ par $\boldsymbol{A}^{-1}$.

- **Calcul de l'inverse**

  Soit $\boldsymbol{A}$ une matrice carrée d'ordre $n$. À chaque élément $a_{ij}$ correspond un cofacteur $A_{ij}$. On forme la matrice $\boldsymbol{A}^{c}$ où chaque élément $a_{ij}$ est remplacé par son cofacteur : c'est la matrice des cofacteurs. On transpose cette matrice pour obtenir une nouvelle matrice, appelée **matrice**

**adjointe**, que l'on note $\boldsymbol{A}^{\mathrm{a}}$. L'inverse de la matrice $\boldsymbol{A}$ est défini par :

$$\boldsymbol{A}^{-1} = \frac{1}{|\,\boldsymbol{A}\,|}\boldsymbol{A}^{\mathrm{a}}.$$

On notera que l'inverse d'une matrice existe si et seulement si son déterminant est différent de zéro.

Une matrice carrée $\boldsymbol{A}$ est dite **singulière** si $|\,\boldsymbol{A}\,|= 0$ ; elle est dite **non singulière** (ou régulière) si $|\,\boldsymbol{A}\,|\neq 0$. On peut donc dire que l'inverse d'une matrice existe uniquement si la matrice est non singulière.

**Exemple 8.32** *Soit $\boldsymbol{A}$ une matrice d'ordre 2, nous allons calculer son inverse :*

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

*Nous commençons par calculer son déterminant :*

$$|\,\boldsymbol{A}\,|= (3 \cdot 0) - (2 \cdot 1) = -2.$$

*Puis nous cherchons la matrice des cofacteurs :*

$$\boldsymbol{A}^{c} = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}.$$

*Nous transposons la matrice des cofacteurs pour obtenir la matrice adjointe :*

$$\boldsymbol{A}^{a} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}.$$

*Puis, finalement, nous trouvons l'inverse :*

$$\boldsymbol{A}^{-1} = \frac{1}{|\,\boldsymbol{A}\,|}\boldsymbol{A}^{a} = -\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1/2 \\ 1 & -3/2 \end{bmatrix}.$$

**Exemple 8.33** *Prenons cette fois une matrice $\boldsymbol{A}$ d'ordre 3 et calculons son inverse :*

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -3 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

*Nous commençons par calculer* $|\,\boldsymbol{A}\,|$ *:*

$$\begin{aligned} |\,\boldsymbol{A}\,| &= (-1)^{1+1}\cdot(-2)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + (-1)^{3+1}\cdot(-3)\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\ &= -2-3=-5. \end{aligned}$$

*Nous cherchons ensuite les cofacteurs :*

$$\begin{aligned} A_{11} &= (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 & A_{12} &= (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} = -3 \\ A_{13} &= (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} = 3 & A_{21} &= (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -3 \\ A_{22} &= (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} = -1 & A_{23} &= (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} -2 & 2 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} = -4 \\ A_{31} &= (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 & A_{32} &= (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 \\ A_{33} &= (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -2. \end{aligned}$$

*D'où la matrice des cofacteurs :*

$$\boldsymbol{A}^c = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 3 \\ -3 & -1 & -4 \\ 1 & 2 & -2 \end{bmatrix}.$$

*Nous la transposons pour obtenir la matrice adjointe :*

$$\boldsymbol{A}^a = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 \\ -3 & -1 & 2 \\ 3 & -4 & -2 \end{bmatrix}.$$

*Finalement, l'inverse est le suivant :*

$$\boldsymbol{A}^{-1} = \frac{1}{|\,\boldsymbol{A}\,|}\boldsymbol{A}^a = -\frac{1}{5}\begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 \\ -3 & -1 & 2 \\ 3 & -4 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/5 & 3/5 & -1/5 \\ 3/5 & 1/5 & -2/5 \\ -3/5 & 4/5 & 2/5 \end{bmatrix}.$$

**Quelques propriétés de l'inverse**

1. Si $\boldsymbol{A} = (a_{11})$, $a_{11} \neq 0$ alors $\boldsymbol{A}^{-1} = \dfrac{1}{a_{11}}$.

2. Si $\boldsymbol{A}$ est inversible, alors l'inverse $\boldsymbol{A}^{-1}$ de $\boldsymbol{A}$ est unique.

3. Si $\boldsymbol{A}$ et $\boldsymbol{B}$ sont deux matrices carrées et inversibles alors : $(\boldsymbol{AB})^{-1} = \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}$.

4. $(\boldsymbol{A}^{-1})^{-1} = \boldsymbol{A}$.

5. $(\boldsymbol{A}')^{-1} = (\boldsymbol{A}^{-1})'$.

6. Si $\boldsymbol{A}$ est une matrice non singulière, alors $\boldsymbol{AB} = \mathbf{O} \Rightarrow \boldsymbol{B} = \mathbf{O}$.

7. $Det(\boldsymbol{A}^{-1}) = \dfrac{1}{\mathrm{Det}(\boldsymbol{A})}$.

## 8.13 Inverse d'une matrice partagée

Soit la matrice partagée :

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{A_{11}} & \boldsymbol{A_{12}} \\ \boldsymbol{A_{21}} & \boldsymbol{A_{22}} \end{bmatrix} \tag{8.1}$$

où $\boldsymbol{A_{11}}$ et $\boldsymbol{A_{22}}$ sont deux matrices carrées et non singulières. On peut vérifier que l'inverse de la matrice $\boldsymbol{A}$ est égal à :

$$\boldsymbol{A}^{-1} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{B_{11}} & \boldsymbol{B_{12}} \\ \boldsymbol{B_{21}} & \boldsymbol{B_{22}} \end{bmatrix}$$

où

$$\begin{aligned} B_{11} &= \boldsymbol{A_{11}}^{-1} + \boldsymbol{A_{11}}^{-1}\boldsymbol{A_{12}}\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A_{21}}\boldsymbol{A_{11}}^{-1} \\ B_{12} &= -\boldsymbol{A_{11}}^{-1}\boldsymbol{A_{12}}\boldsymbol{B}^{-1} \\ B_{21} &= -\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A_{21}}\boldsymbol{A_{11}}^{-1} \\ B_{22} &= \boldsymbol{B}^{-1} \end{aligned}$$

où

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{A_{22}} - \boldsymbol{A_{21}}\boldsymbol{A_{11}}^{-1}\boldsymbol{A_{12}}$$

Il est souvent souhaitable de pouvoir calculer le déterminant d'une matrice partagée. Si $\boldsymbol{A_{11}}$ dans (8.1) est non singulière, le déterminant de $\boldsymbol{A}$ est égal à :

$$\mid \boldsymbol{A} \mid = \mid \boldsymbol{A_{11}} \mid \cdot \mid \boldsymbol{A_{22}} - \boldsymbol{A_{21}} \cdot \boldsymbol{A_{11}}^{-1} \cdot \boldsymbol{A_{12}} \mid$$

et si $\boldsymbol{A_{22}}$ est non singulière, le déterminant de $\boldsymbol{A}$ est égal à :

$$\mid \boldsymbol{A} \mid = \mid \boldsymbol{A_{22}} \mid \cdot \mid \boldsymbol{A_{11}} - \boldsymbol{A_{12}} \cdot \boldsymbol{A_{22}}^{-1} \cdot \boldsymbol{A_{21}} \mid .$$

# Exercices

1. Soient les matrices :

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 0 & 4 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

   (a) Trouver une matrice $\boldsymbol{C}$ telle que $\boldsymbol{A}-2\,\boldsymbol{B}-\boldsymbol{C}=\mathbf{O}$.

   (b) Trouver une matrice $\boldsymbol{D}$ telle que $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C}-4\,\boldsymbol{D}=\mathbf{O}$.

2. Effectuer les multiplications suivantes :

$$\text{(a)} \quad \begin{bmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 2 & 7 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 8 \\ 0 & -5 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\text{(b)} \quad \begin{bmatrix} -3 & 0 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ -4 \\ -3 \end{bmatrix}.$$

3. On donne :

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 2 & -3 & -5 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 5 \\ 1 & -3 & -5 \\ -1 & 3 & 5 \end{bmatrix}$$

   Montrer que l'on a :

   (a) $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}=\mathbf{O}$

   (b) $\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{B}^2=(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})$

   (c) $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^2=\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{B}^2$

4. En général, $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^2 \neq \boldsymbol{A}^2+2\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{B}^2$. Sous quelle condition a-t-on l'égalité ?

5. Soient les matrices :

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 2 & -3 & -5 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \end{bmatrix}$$

**Note** On dit qu'une matrice $\boldsymbol{A}$ est idempotente si $\boldsymbol{A}^2 = \boldsymbol{A}$.

Montrer que :

(a) $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{A}$

(b) $\boldsymbol{BA} = \boldsymbol{B}$

(c) $\boldsymbol{A}$ et $\boldsymbol{B}$ sont idempotentes.

6. De façon générale, montrer que si $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{A}$ et $\boldsymbol{BA} = \boldsymbol{B}$ alors $\boldsymbol{A}$ et $\boldsymbol{B}$ sont idempotentes.

7. On donne :

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 2 & -3 & -5 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 5 \\ 1 & -3 & -5 \\ -1 & 3 & 5 \end{bmatrix}.$$

Montrer que $\boldsymbol{A}$ et $\boldsymbol{B}$ sont idempotentes, mais que $\boldsymbol{AB} \neq \boldsymbol{A}$.
Ainsi, la réciproque du théorème de l'exercice 6 est fausse !

8. Soit $\boldsymbol{A}$ une matrice composée de nombres réels.
Peut-on avoir $\boldsymbol{AA}' = \mathbf{O}$ sans que $\boldsymbol{A} = \mathbf{O}$ ?
Si oui, donner un exemple.
Si non, expliquer soigneusement pourquoi.

9. **Note** On dit que deux matrices $\boldsymbol{A}$ et $\boldsymbol{B}$ commutent si
$\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{BA}$.

Trouver toutes les matrices qui commutent avec $\boldsymbol{A}$ :

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}.$$

10. Trouver une matrice $\boldsymbol{A} \neq \boldsymbol{I}$ et telle que $\boldsymbol{A}^2 = \boldsymbol{I}$.

11. On donne :

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & -4 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -5 \\ -1 & 6 \end{bmatrix}.$$

Trouver $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{C}$. Calculer $(\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{C})'$ de deux façons différentes.
Quelle est la trace de $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{C}$ ? Et celle de $(\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{C})'$ ?

12. Pour quelle valeur de $x$ la trace de la matrice $\boldsymbol{A}$ est minimale? Et pour quelle valeur de $x$ est-elle maximale?

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 2x^3 & 4 & 1 \\ 0 & 3x^2 & 2 \\ 5 & 6 & -12x \end{bmatrix}.$$

13. Calculer $a$, $b$, $c$ et $d$ dans la relation suivante :

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 8 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \boldsymbol{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

14. Calculer le nombre d'inversions dans les suites :

    (a) 5, 2, 6, 1, 4, 3.

    (b) 10, 4, 5, 6, 1, 2, 7, 3, 9, 8.

    (c) 15, 14, 13, 12, 11, 10, 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1.

15. Calculer le déterminant des matrices :

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 6 \\ 7 & 2 & 4 \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 7 & 9 & 1 \\ 3 & 0 & 8 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} 3 & 7 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 5 & 6 & 9 \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{D} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

16. Soit :

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}.$$

Montrer que l'on a :

$$|\, \boldsymbol{A} + \boldsymbol{B} \,| = |\, \boldsymbol{A} \,| + |\, \boldsymbol{B} \,| + \begin{vmatrix} a_{11} & b_{12} \\ a_{21} & b_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_{11} & a_{12} \\ b_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

17. Pour quelles valeurs de $x$ le déterminant de la matrice $\boldsymbol{A}$ :

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} x & x^2 \\ 4 & x^3 \end{bmatrix}$$

(a) s'annule-t-il?

(b) est-il maximal?

(c) est-il minimal?

18. Calculer, en utilisant la partition des matrices, le produit $\boldsymbol{AB}$ :

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Calculer ensuite $|\ \boldsymbol{A}\ |$, $|\ \boldsymbol{B}\ |$ et $|\ \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}\ |$.

19. Soit $\boldsymbol{A}$ une matrice non singulière symétrique. Montrer que son inverse $\boldsymbol{A}^{-1}$ est aussi symétrique.

20. Calculer, si possible, l'inverse des matrices suivantes :

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & -6 \\ 3 & 0 & 4 \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 8 \\ 0 & 1 & -6 \\ 2 & 0 & 4 \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 3 & 1 \end{bmatrix}.$$



## D'ALEMBERT Jean Le Rond (1717-1783)

Jean d'Alembert est né à Paris, en novembre 1717. Il finit ses études d'avocat en 1738, mais décide de ne pas continuer dans cette voie. Il s'investit dans les mathématiques, et est admis en 1741 à l'Académie des Sciences de Paris. D'Alembert publie son *Traité de Dynamique en 1743,* et son *Traité de l'Équilibre et du Mouvement des Fluides* en 1744. Puis, il s'implique pendant plusieurs années dans la rédaction de *L'Encyclopédie* avec Diderot. D'Alembert est l'auteur de la plupart des articles mathématiques des 28 volumes de l'ouvrage. Parallèlement, il continue son travail mathématique. Il est notement un des pionniers de l'étude des équations différentielles partielles et dans leurs utilisations en physique (*Réflexions sur la Cause Générale des Vents* (1746)). Entre 1761 et 1780, il publie conjointement avec Euler : *Opuscules Mathématique,* en 8 volumes. Son article *Différentiel,* paru dans le volume 4 de *L'Encyclopédie,* est une autre contribution importante aux mathématiques. Il y suggère les bases de la théorie des limites. Dans la dernière partie de sa vie, D'Alembert se tourne vers la littérature et la philosophie (*Mélanges de Littérature et de Philosophie* 1753-1767). D'Alembert est élu en 1772 secrétaire perpétuel de l'Académie française dont il devient un des membres les plus influents. Il meurt en 1783.

# Chapitre 9

# Systèmes d'équations linéaires

## 9.1 Introduction

On est souvent confronté à la résolution de systèmes d'équations linéaires. Dans ce chapitre, nous allons voir que le calcul matriciel est un outil puissant et bien adapté à ce genre de problèmes. Il permet en effet d'accroître la vitesse de résolution de tels systèmes et d'en simplifier considérablement le calcul. Dans un premier temps, nous allons aborder la notion de rang d'une matrice, qui est indispensable pour déterminer les solutions d'un système d'équations linéaires.

## 9.2 Rang d'une matrice

Soit $\boldsymbol{A}$ une matrice d'ordre $(m \times n)$. On appelle **sous-matrice** une matrice qui est obtenue à partir de la matrice $\boldsymbol{A}$ lorsqu'on élimine une ou plusieurs lignes (ou colonnes). Si une sous-matrice est carrée, on peut calculer son déterminant. Par conséquent, une sous-matrice sera singulière si son déterminant est nul et non singulière si son déterminant est différent de zéro.

À l'aide de cette notion, on peut définir le rang d'une matrice.

Soit $r$ un nombre entier, inférieur ou égal au plus petit des deux entiers $m$ et $n$, c'est-à-dire $r \leq \min(m,n)$, le **rang** d'une matrice $\boldsymbol{A}$ d'ordre $(m \times n)$ est égal à $r$ s'il existe **au moins une** sous-matrice carrée d'ordre $r$ qui est

non singulière et si toutes les sous-matrices carrées d'ordre supérieur à $r$ sont singulières.

Le rang d'une matrice est donc égal à l'ordre de la plus grande sous-matrice carrée non singulière. Une matrice carrée d'ordre $n$ non singulière a un rang égal à $n$ ($r = n$). Si tous les éléments d'une matrice sont nuls, on dit que le rang est zéro. Si une matrice $\boldsymbol{A}$ d'ordre $(m \times n)$ a un rang maximal (égal au plus petit de $m$ et $n$), on dit que la matrice a un **rang complet**.

**Exemple 9.1** *Si $\boldsymbol{A}$ est la matrice suivante d'ordre $(2 \times 3)$, cherchons son rang :*

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}.$$

*Le rang de $\boldsymbol{A}$ est égal à 2 et on écrit $r(\boldsymbol{A}) = 2$. En effet, la sous-matrice carrée d'ordre 2, composée de la première et de la deuxième colonne est singulière. Mais la sous-matrice carrée d'ordre 2, composée de la deuxième et de la troisième colonne est non singulière (déterminant $= -3$). Il existe donc au moins une sous-matrice d'ordre 2 dont le déterminant est différent de zéro.*

**Exemple 9.2** *Considérons la matrice d'ordre 3 suivante et cherchons son rang :*

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

*Nous calculons d'abord le déterminant de $\boldsymbol{A}$ :*

$$\mid \boldsymbol{A} \mid = (-1)^{2+2} \cdot 2 \left| \begin{array}{cc} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{array} \right] = 0.$$

*Nous savons déjà que $r(\boldsymbol{A})$ sera inférieur à 3 puisque $|\boldsymbol{A}| = 0$. Calculons maintenant le déterminant d'une sous-matrice carrée d'ordre 2, disons :*

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2.$$

*Nous constatons qu'il y a au moins une sous-matrice d'ordre 2 qui est non singulière, d'où $r(\boldsymbol{A}) = 2$.*

## 9.3 Transformations élémentaires

Il est évident que le calcul du rang d'une matrice peut être une opération très longue. Prenons le cas d'une matrice carrée d'ordre $n$. Nous devons d'abord calculer le déterminant de la matrice elle-même. Si le déterminant est différent de zéro, le rang est $n$ mais s'il est égal à zéro, il faudra calculer le déterminant des sous-matrices d'ordre $(n-1)$. Or, il y en a $n^2$. Si toutes ces sous-matrices ont un déterminant nul, il faut passer aux sous-matrices d'ordre $(n-2)$ et ainsi de suite. C'est pour cette raison que nous allons voir une méthode qui facilite la détermination du rang d'une matrice. Cette méthode se base sur les **transformations élémentaires**.

Il y a trois sortes de transformations élémentaires :

1. Échange de deux lignes (ou deux colonnes) de la matrice.

2. Multiplication de tous les éléments d'une ligne (ou colonne) de la matrice par la même constante (différente de zéro).

3. Addition aux éléments d'une ligne de la matrice d'un multiple quelconque des éléments correspondants d'une autre ligne (idem pour les colonnes).

Ces transformations élémentaires ne changent pas le rang de la matrice. Ainsi, nous allons utiliser ces transformations pour réduire une matrice $\boldsymbol{A}$ à sa **forme normale**. Si $\boldsymbol{A}$ est une matrice d'ordre $(m \times n)$, sa forme normale est la suivante :

$$\begin{array}{c} \\ \\ r \\ \\ \\ \\ m-r \\ \\ \end{array} \quad \left[\begin{array}{cccc|ccc} 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ \hline 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc} \boldsymbol{I} & 0 \\ 0 & 0 \end{array}\right]$$

Le rang de cette matrice est $r$, car la plus grande sous-matrice non singulière est d'ordre $r$.

**Exemple 9.3** *La forme normale d'une matrice carrée non singulière d'ordre 3 est la matrice identité d'ordre 3 :*

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

*C'est le cas où* $m = n = r = 3$.

**Exemple 9.4** *La forme normale d'une matrice d'ordre* $(3 \times 2)$ *de rang 2 est :*

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

*C'est le cas où* $m > n$ *et* $r = n$.

On peut obtenir la forme normale d'une matrice et, par conséquent, le rang de cette matrice en procédant d'une manière systématique :

1. On utilise des transformations élémentaires du type 1 si l'élément en position $(1, 1)$ est nul.

2. On divise tous les éléments de la première ligne par l'élément de la position $(1, 1)$ pour obtenir un “1” en position $(1, 1)$.

3. On enlève des multiples appropriés à la première ligne de toutes les autres lignes afin d'obtenir des zéros partout ailleurs dans la première colonne.

4. On enlève des multiples appropriés de la (nouvelle) première colonne de toutes les autres colonnes, afin d'obtenir des zéros partout ailleurs dans la première ligne.

5. On répète les points 1 à 4 pour l'élément de la position $(2, 2)$.

6. On poursuit le même procédé en descendant le long de la diagonale principale. Le procédé s'achève lorsque l'on arrive à la fin de la diagonale ou que tous les éléments non nuls ont été utilisés.

**Exemple 9.5** *Prenons une matrice d'ordre* $(3 \times 4)$ *et cherchons son rang à l'aide des transformations élémentaires :*

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 6 & 9 \\ 1 & 3 & 3 & 5 \end{bmatrix}.$$

1. *Nous échangeons la 1*[re] *et la 2*[e] *lignes pour obtenir un élément non nul en position* $(1,1)$*, ce qui nous donne :*

$$\begin{bmatrix} 3 & 3 & 6 & 9 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 3 & 5 \end{bmatrix}.$$

2. *Nous divisons tous les éléments de la 1*[re] *ligne par 3 pour obtenir 1 en position* $(1,1)$ *:*

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 3 & 5 \end{bmatrix}.$$

3. *Nous enlevons une fois la 1*[re] *ligne de la 3*[e] *ligne pour obtenir un zéro en position* $(3,1)$ *:*

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

*La deuxième ligne possède déjà un zéro en position* $(2,1)$.

4. *Nous enlevons une fois la 1*[re] *colonne de la 2*[e] *colonne pour obtenir un zéro en position* $(1,2)$ *:*

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

*Nous enlevons deux fois la 1*[re] *colonne de la 3*[e] *colonne pour obtenir un zéro en position* $(1,3)$ *:*

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

*Nous enlevons trois fois la 1re colonne de la 4e colonne pour obtenir un zéro en position* $(1, 4)$ *:*

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

*Nous reprenons les points 1 à 4 pour l'élément* $(2, 2)$ *:*

1. *Le point 1 n'est pas nécessaire car l'élément* $(2, 2)$ *est non nul.*

2. *Nous divisons la 2e ligne par 2 pour obtenir un 1 en position* $(2, 2)$ *:*

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1/2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

3. *Nous enlevons deux fois la 2e ligne de la 3e ligne pour obtenir un zéro en position* $(3, 2)$ *:*

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1/2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

4. *Nous enlevons 1/2 fois la 2e colonne de la 3e colonne pour obtenir un zéro en position* $(2, 3)$ *:*

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

*Nous enlevons une fois la 2e colonne de la 4e colonne pour obtenir un zéro en position* $(2, 4)$ *:*

$$\left[\begin{array}{cc|cc} \mathit{1} & \mathit{0} & \mathit{0} & \mathit{0} \\ \mathit{0} & \mathit{1} & \mathit{0} & \mathit{0} \\ \hline \mathit{0} & \mathit{0} & \mathit{0} & \mathit{0} \end{array}\right].$$

5. *Nous avons ainsi épuisé tous les éléments non nuls. La forme normale obtenue a un rang égal à deux, par conséquent :*

$$r(\boldsymbol{A}) = 2.$$

- **Rang d'un produit de deux matrices**

  Le rang d'un produit de deux matrices $\boldsymbol{A}$ et $\boldsymbol{B}$ est égal ou inférieur au plus petit des rangs des deux matrices, c'est-à-dire :

$$r(\boldsymbol{AB}) \leq \min[r(\boldsymbol{A}), r(\boldsymbol{B})].$$

## 9.4 Systèmes d'équations linéaires

Soit un système de $m$ équations linéaires à $n$ variables représenté par sa forme générale :

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n &= b_m. \end{aligned}$$

On peut écrire ce système sous forme matricielle :

$$\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$$

où $\boldsymbol{A}$ est une matrice d'ordre $(m \times n)$ appelée **matrice des coefficients**, $\boldsymbol{x}$ est un vecteur-colonne à $n$ composantes appelé **vecteur des inconnues** et $\boldsymbol{b}$ est un vecteur-colonne à $m$ composantes appelé **vecteur des constantes**.

**Exemple 9.6** *Écrivons le système d'équations linéaires suivant sous forme matricielle :*

$$\begin{array}{rcrcrcr} 3x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & = & 1 \\ -x_1 & + & x_2 & & & = & -2 \\ 2x_1 & - & x_2 & - & x_3 & = & 4 \end{array}$$

*Nous avons 3 équations* $(m = 3)$ *et 3 variables* $(n = 3)$. *La matrice des coefficients* $\mathbf{A}$ *est donc une matrice d'ordre* $(3 \times 3)$ *:*

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

*Le vecteur des inconnues* $\boldsymbol{x}$ *est un vecteur à 3 composantes :*

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}.$$

*Le vecteur des constantes b est un vecteur à 3 composantes :*

$$\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

*Nous avons finalement le système suivant :*

$$\begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{bmatrix}$$
$$\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}.$$

*Si on ajoute le vecteur-colonne des constantes* **b** *à la matrice des coefficients* $\boldsymbol{A}$*, on obtient ce qu'on appelle la* ***matrice augmentée*** *que l'on note par* $[\boldsymbol{A} \mid \boldsymbol{b}]$.

**Exemple 9.7** *Si l'on prend le système de l'exemple 9.6, la matrice augmentée* $[\boldsymbol{A} \mid \boldsymbol{b}]$ *est la suivante :*

$$[\boldsymbol{A} \mid \boldsymbol{b}] = \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & -2 \\ 2 & -1 & -1 & 4 \end{array}\right].$$

On va voir maintenant comment résoudre un système d'équations linéaires, c'est-à-dire trouver la solution de ce système. Par **solution** du système, on entend un ensemble de valeurs $x_1, x_2, \ldots, x_n$ qui satisfait simultanément toutes les $m$ équations du système. Une solution n'est pas nécessairement unique. Il peut y avoir une infinité de solutions ou pas de solution du tout. Dans ce dernier cas, on dit que le système est **incompatible** (ou impossible).

Voici la condition pour qu'il y ait au moins une solution : un système de $m$ équations à $n$ variables (ou inconnues) est compatible si et seulement si la matrice des coefficients $\boldsymbol{A}$ et la matrice augmentée $[\boldsymbol{A} \mid \boldsymbol{b}]$ **ont le même rang**.

Nous allons donc devoir chercher le rang de la matrice augmentée et voir s'il est égal au rang de la matrice des coefficients. Pour ce faire, on va appliquer **aux lignes** de la matrice augmentée des opérations élémentaires. Il est

évident qu'une opération élémentaire sur une ligne de la matrice augmentée ne change pas les solutions d'un système.

Nous avons plusieurs cas à étudier :

- système à $n$ équations à $n$ inconnues ;
- système à $m$ équations à $n$ inconnues, $m > n$ ;
- système à $m$ équations à $n$ inconnues, $m < n$.

- **Système de $n$ équations à $n$ inconnues**

  Si le système a $n$ équations et $n$ variables, la matrice des coefficients $\boldsymbol{A}$ est une matrice carrée d'ordre $n$. Si le rang de la matrice $\boldsymbol{A}$ est $n$, c'est-à-dire si la matrice $\boldsymbol{A}$ est non singulière, alors **la solution est unique**. Dans ce cas, $\boldsymbol{A}$ possède un inverse. On peut, par conséquent, trouver la solution à l'aide de l'inverse de la matrice $\boldsymbol{A}$. Le système étant :

  $$\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$$

  on obtient la solution en pré-multipliant de chaque côté de l'équation par $\boldsymbol{A}^{-1}$ :

  $$\begin{aligned} \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{Ax} &= \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{Ix} &= \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{x} &= \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{b}. \end{aligned}$$

**Exemple 9.8** *Soit le système de 3 équations et 3 variables suivant, on va en trouver la solution :*

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & = & 14 \\ x_1 & - & 3x_2 & - & 7x_3 & = & -26 \\ -6x_1 & + & 4x_2 & - & 2x_3 & = & -4. \end{array}$$

*Calculons l'inverse de* $\boldsymbol{A}$ *:* $\boldsymbol{A}^{-1} = \dfrac{1}{|\boldsymbol{A}|}\boldsymbol{A}^a$.

*Commençons par le déterminant :*

$$\begin{aligned} |\boldsymbol{A}| &= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -3 & -7 \\ -6 & 4 & -2 \end{vmatrix} \\ &= 1 \cdot (6 + 28) + (-1) \cdot (-4 - 12) + (-6) \cdot (-14 + 9) \\ &= 34 + 16 + 30 = 80. \end{aligned}$$

*Cherchons ensuite la matrice des cofacteurs :*

$$\boldsymbol{A}^c = \begin{bmatrix} 34 & 44 & -14 \\ 16 & 16 & -16 \\ -5 & 10 & -5 \end{bmatrix}$$

*que nous transposons pour obtenir la matrice adjointe :*

$$\boldsymbol{A}^a = \begin{bmatrix} 34 & 16 & -5 \\ 44 & 16 & 10 \\ -14 & -16 & -5 \end{bmatrix}.$$

*L'inverse est donc le suivant :*

$$\boldsymbol{A}^{-1} = \frac{1}{|\,\boldsymbol{A}\,|}\boldsymbol{A}^a = \frac{1}{80}\begin{bmatrix} 34 & 16 & -5 \\ 44 & 16 & 10 \\ -14 & -16 & -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 17/40 & 1/5 & -1/16 \\ 11/20 & 1/5 & 1/8 \\ -7/40 & -1/5 & -1/16 \end{bmatrix}.$$

*Nous devons encore post-multiplier par le vecteur* $\boldsymbol{b}$ *pour trouver* $\boldsymbol{x}$ *:*

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x} &= \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{b} \\ &= \begin{bmatrix} 17/40 & 1/5 & -1/16 \\ 11/20 & 1/5 & 1/8 \\ -7/40 & -1/5 & -1/16 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 14 \\ -26 \\ -4 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

*Nous pouvons également rechercher la solution par une méthode de résolution appelée* ***algorithme de Gauss****. Ainsi, nous commençons par chercher le rang de la matrice augmentée, qui se présente ainsi :*

$$[\boldsymbol{A} \mid \boldsymbol{b}] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 14 \\ 1 & -3 & -7 & -26 \\ -6 & 4 & -2 & -4 \end{array}\right]$$

*L'application des opérations élémentaires sur les lignes de la matrice nous conduit successivement à :*

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 3 & 14 \\ 0 & -5 & -10 & -40 \\ -6 & 4 & -2 & -4 \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 3 & 14 \\ 0 & -5 & -10 & -40 \\ 0 & 16 & 16 & 80 \end{array}\right]$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 3 & 14 \\ 0 & 1 & 2 & 8 \\ 0 & 16 & 16 & 80 \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 8 \\ 0 & 16 & 16 & 80 \end{array}\right]$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 8 \\ 0 & 0 & -16 & -48 \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right]$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right].$$

*La dernière matrice augmentée a un rang de 3. La matrice des coefficients a aussi un rang de 3. La solution existe donc et elle est unique. Pour trouver cette solution, nous prenons la dernière matrice. La première colonne représente les coefficients de la variable $x_1$, la deuxième colonne les coefficients de la variable $x_2$ et la troisième colonne les coefficients de la variable $x_3$. Quant à la dernière colonne, elle représente les constantes. Nous pouvons donc déduire de la première ligne :*

$$1x_1 + 0x_2 + 0x_3 = 1, \text{ d'où } x_1 = 1.$$

*De la deuxième ligne, nous avons :*

$$0x_1 + 1x_2 + 0x_3 = 2, \text{ d'où } x_2 = 2.$$

*Et de la troisième ligne, nous avons :*

$$0x_1 + 0x_2 + 1x_3 = 3, \text{ d'où } x_3 = 3.$$

*La solution complète est par conséquent :*

$$x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 3.$$

Étudions maintenant ce qui se passe si le rang de la matrice $\boldsymbol{A}$ est inférieur à $n$. Deux cas se présentent :

- si le rang de $[\boldsymbol{A} \mid \boldsymbol{b}]$ est égal au rang de $\boldsymbol{A}$, il y a des **solutions multiples** ;
- si le rang de $[\boldsymbol{A} \mid \boldsymbol{b}]$ est différent de celui de $\boldsymbol{A}$, il n'y a **pas de solution**.

**Exemple 9.9** *Soit le système de 3 équations et 3 variables suivant, nous allons en chercher la solution :*

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & = & 14 \\ x_1 & - & 3x_2 & - & 7x_3 & = & -26 \\ 3x_1 & - & 2x_2 & - & 7x_3 & = & -22 \end{array}$$

*À la suite d'opérations élémentaires, on obtient :*

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 3 & 14 \\ 1 & -3 & -7 & -26 \\ 3 & -2 & -7 & -22 \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 3 & 14 \\ 0 & -5 & -10 & -40 \\ 0 & -8 & -16 & -64 \end{array}\right]$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 3 & 14 \\ 0 & 1 & 2 & 8 \\ 0 & -8 & -16 & -64 \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

*Dans cette dernière matrice, le rang de $[\boldsymbol{A}|\boldsymbol{b}]$ est égal à 2 comme le rang de $\boldsymbol{A}$. Le système est donc compatible. Quand le rang est $r$, avec $r < n$, on peut donner à $(n - r)$ variables du système des valeurs arbitraires et ensuite résoudre le système par rapport aux autres variables. On a alors la solution complète du système.*
*Ici, $r = 2$ et $n = 3$, on peut donc fixer arbitrairement $(n - r) = (3 - 2) = 1$*

*variable. Choisissons de fixer $x_3 = s$. Nous pouvons alors résoudre le système d'après la dernière matrice. De la première ligne, on déduit :*

$$x_1 + 0x_2 - x_3 = -2, \quad \textit{d'où} \ \ x_1 - x_3 = -2$$

*et de la deuxième ligne, on tire :*

$$0x_1 + x_2 + 2x_3 = 8, \quad \textit{d'où} \ \ x_2 + 2x_3 = 8.$$

*Avec $x_3 = s$, la solution complète est :*

$$\begin{array}{rcl} x_1 & = & -2 + s \\ x_2 & = & 8 - 2s \\ x_3 & = & s. \end{array}$$

*Par exemple, en posant $s = 1$, nous avons une des solutions possibles :*

$$x_1 = -1, x_2 = 6, x_3 = 1.$$

**Exemple 9.10** *Soit le système de 3 équations et 3 variables suivant, nous allons en chercher la solution :*

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & = & 14 \\ x_1 & - & 3x_2 & - & 7x_3 & = & -26 \\ 3x_1 & - & 2x_2 & - & 7x_3 & = & -20 \end{array}$$

*À la suite d'opérations élémentaires, on obtient :*

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 3 & 14 \\ 1 & -3 & -7 & -26 \\ 3 & -2 & -7 & -20 \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 3 & 14 \\ 0 & -5 & -10 & -40 \\ 0 & -8 & -16 & -62 \end{array}\right]$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 3 & 14 \\ 0 & 1 & 2 & 8 \\ 0 & -8 & -16 & -62 \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right].$$

*Dans la dernière matrice, le rang de $(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{b})$ est égal à 3 tandis que le rang de $\boldsymbol{A}$ est égal à 2. Le système est donc incompatible $(0x_1 + 0x_2 + 0x_3 = 2)$, c'est-à-dire qu'il n'y a pas de solution.*

- **Système de $m$ équations à $n$ inconnues, $m > n$.**

  Nous considérons ici les systèmes dans lesquels le nombre d'équations est supérieur au nombre de variables. Les trois exemples suivants montrent que trois cas peuvent se présenter :

  - soit il y a solution unique ;
  - soit il y a infinité de solutions ;
  - soit il n'y a pas de solution.

**Exemple 9.11** *Soit le système de 3 équations et 2 variables suivant, nous allons en chercher la solution :*

$$\begin{array}{rcrcr} 2x_1 & + & 4x_2 & = & 4 \\ 2x_1 & - & 3x_2 & = & 18 \\ x_1 & - & 4x_2 & = & 14 \end{array}$$

*Les opérations élémentaires donnent les étapes suivantes :*

$$\left[\begin{array}{rr|r} 2 & 4 & 4 \\ 2 & -3 & 18 \\ 1 & -4 & 14 \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{rr|r} 1 & 2 & 2 \\ 2 & -3 & 18 \\ 1 & -4 & 14 \end{array}\right]$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{rr|r} 1 & 2 & 2 \\ 0 & -7 & 14 \\ 0 & -6 & 10 \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{rr|r} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & -6 & 12 \end{array}\right]$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{rr|r} 1 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

*Dans la dernière matrice, le rang de $[\boldsymbol{A}|\boldsymbol{b}]$ est égal à 2 comme le rang de $\boldsymbol{A}$. Le système est compatible et la solution est unique vu que $n = r = 2$. Cette solution est :*

$$x_1 = 6, x_2 = -2$$

**Exemple 9.12** *Soit le système de 4 équations et 3 variables suivant :*

$$\begin{array}{rcrcrcr} 2x_1 & - & 2x_2 & + & 2x_3 & = & 6 \\ -x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & = & 0 \\ & & -x_2 & - & 4x_3 & = & -3 \\ -2x_1 & + & 3x_2 & + & 2x_3 & = & -3 \end{array}$$

*Par les opérations élémentaires, on trouve successivement :*

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 2 & -2 & 2 & 6 \\ -1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & -4 & -3 \\ -2 & 3 & 2 & -3 \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & -4 & -3 \\ -2 & 3 & 2 & -3 \end{array}\right]$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & -1 & -4 & -3 \\ 0 & 1 & 4 & 3 \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 5 & 6 \\ 0 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

*Dans la dernière matrice, le rang de* $(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{b})$ *est égal à 2, comme le rang de* $\boldsymbol{A}$. *Le système est donc compatible. Il y a une infinité de solutions car* $n = 3$ *et* $r = 2$. *On peut fixer arbitrairement* $(n - r) = (3 - 2) = 1$ *variable. Posons que* $x_3 = s$.

*Nous pouvons alors résoudre le système avec la dernière matrice :*

$$\begin{aligned} x_1 + 5x_3 &= 6 \\ x_2 + 4x_3 &= 3. \end{aligned}$$

*Avec* $x_3 = s$, *la solution complète est :*

$$\begin{aligned} x_1 &= 6 - 5s \\ x_2 &= 3 - 4s \\ x_3 &= s. \end{aligned}$$

**Exemple 9.13** *Si dans le système de l'exemple 9.12, on donne à la constante de la 3e équation la valeur de* $-4$ *à la place de* $-3$*, on obtient la matrice suivante :*

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 2 & -2 & 2 & 6 \\ -1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & -4 & -4 \\ -2 & 3 & 2 & -3 \end{array}\right].$$

*Les transformations élémentaires nous donnent :*

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & -4 & -4 \\ -2 & 3 & 2 & -3 \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & -1 & -4 & -4 \\ 0 & 1 & 4 & 3 \end{array}\right]$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 5 & 6 \\ 0 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

*Dans la dernière matrice, le rang de* $[\boldsymbol{A}|\boldsymbol{b}]$ *est égal à 3, tandis que le rang de* $\boldsymbol{A}$ *est égal à 2. Le système est donc incompatible.*

- **Système de $m$ équations à $n$ inconnues, $m < n$**

  Si la matrice des coefficients est d'ordre $(m \times n)$ avec $m < n$, le rang de $\boldsymbol{A}$ est au maximum $m$. Le rang est donc inférieur à $n$. Il s'ensuit qu'il n'y a que deux cas possibles :

  – si le rang de $[\boldsymbol{A}|\boldsymbol{b}]$ est égal au rang de $\boldsymbol{A}$, il y aura une infinité de solutions et on pourra fixer $(n - r)$ variables arbitrairement (avec $r = r(\boldsymbol{A}) = r([\boldsymbol{A} \mid \boldsymbol{b}])$ ;

– si le rang de $[\boldsymbol{A}|\boldsymbol{b}]$ est différent de celui de $\boldsymbol{A}$, le système est incompatible.

Lorsqu'il y a plus de variables que d'équations, la solution n'est donc jamais unique.

**Exemple 9.14** *Soit le système de 2 équations et 3 variables suivant, nous allons en chercher la solution :*

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 + 2x_3 &= 2 \\ -x_1 + 2x_2 + 2x_3 &= 2. \end{aligned}$$

*Les transformations élémentaires sont les suivantes :*

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 2 & 2 \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -2 & -2 \\ 2 & -1 & 2 & 2 \end{array}\right]$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -2 & -2 \\ 0 & 3 & 6 & 6 \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \end{array}\right]$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \end{array}\right].$$

*Dans la dernière matrice, le rang de $[\boldsymbol{A}|\boldsymbol{b}]$ est égal à 2, comme le rang de $\boldsymbol{A}$. Le système est compatible et on peut fixer $(n - r) = (3 - 2) = 1$ variable arbitrairement. On peut résoudre le système à l'aide de la dernière matrice :*

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_3 &= 2 \\ x_2 + 2x_3 &= 2. \end{aligned}$$

*Avec $x_3 = s$, la solution complète est :*

$$\begin{aligned} x_1 &= 2 - 2s \\ x_2 &= 2 - 2s \\ x_3 &= s. \end{aligned}$$

**Exemple 9.15** *Soit le système de 2 équations et 3 variables suivant, nous allons en chercher la solution :*

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 + x_3 &= 1 \\ 4x_1 - 2x_2 + 2x_3 &= 4. \end{aligned}$$

*Les transformations élémentaires nous donnent les étapes suivantes :*

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & 1 \\ 4 & -2 & 2 & 4 \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 4 & -2 & 2 & 4 \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right].$$

*Dans la dernière matrice, le rang de $[\boldsymbol{A}|\boldsymbol{b}]$ est égal à 2, tandis que le rang de $\boldsymbol{A}$ est égal à 1. Le système est donc incompatible.*

- **Système homogène**

  Si dans un système d'équations linéaires, toutes les constantes sont nulles, c'est-à-dire si $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$, on dit que le **système est homogène**. Sous forme matricielle, on l'écrit :

$$\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}.$$

  Il est évident que dans un système homogène, le rang de la matrice augmentée est toujours égal au rang de la matrice des coefficients. Par conséquent, un système homogène a toujours au moins une solution. En effet, le vecteur $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$, c'est-à-dire : $x_1 = x_2 = x_3 = \ldots = x_n = 0$, est toujours une solution. C'est la **solution triviale** d'un système homogène. Il existe des solutions autres que la solution triviale si le rang $r$ de la matrice des coefficients est inférieur à $n$. Dans ce cas, on peut donner à $(n-r)$ variables des valeurs arbitraires. Il y a, par conséquent, une infinité de solutions.

  Nous avons alors deux possibilités :

  - soit un système homogène n'a que la solution triviale ;
  - soit un système homogène possède la solution triviale et une infinité d'autres solutions.

La solution triviale représente en quelque sorte la solution unique d'un système homogène. **Il n'y a donc que la solution triviale si le rang de $\boldsymbol{A}$ est égal au nombre de variables.**

Pour qu'un système homogène ait des **solutions non triviales**, il est nécessaire et suffisant que le **rang de $\boldsymbol{A}$ soit inférieur au nombre de variables**, ou alors $|\boldsymbol{A}| = 0$.

**Exemple 9.16** *Soit le système homogène de 3 équations à 2 variables suivant, nous allons voir s'il existe des solutions autres que la solution triviale.*

$$\begin{array}{rcrcl} 2x_1 & + & 4x_2 & = & 0 \\ 2x_1 & - & 3x_2 & = & 0 \\ x_1 & - & 4x_2 & = & 0 \end{array}$$

*Il nous faut chercher le rang de* $\mathbf{A}$ *par les transformations élémentaires :*

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 2 & -3 \\ 1 & -4 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -3 \\ 1 & -4 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -7 \\ 0 & -6 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

*Le rang de* $\mathbf{A}$ *est égal à 2. Le nombre de variables est aussi égal à 2. Il n'y a donc que la solution triviale :*

$$x_1 = 0 \text{ et } x_2 = 0.$$

**Exemple 9.17** *Soit le système homogène de 3 équations à 3 variables suivant, nous allons voir s'il existe des solutions autres que la solution triviale.*

$$\begin{array}{rcrcrcl} x_1 & + & 3x_2 & - & 2x_3 & = & 0 \\ 4x_1 & - & 2x_2 & - & 2x_3 & = & 0 \\ x_1 & - & 4x_2 & + & x_3 & = & 0 \end{array}$$

*Cherchons le rang de* $\mathbf{A}$ *à l'aide des transformations élémentaires :*

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 4 & -2 & -2 \\ 1 & -4 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & -14 & 6 \\ 0 & -7 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 3/7 \\ 0 & -7 & 3 \end{bmatrix}$$
$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -5/7 \\ 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

*Le rang de* $\boldsymbol{A}$ *est égal à 2. Le nombre de variables est égal à 3. On peut donc fixer* $(n-r) = (3-2) = 1$ *variable arbitrairement. De la dernière matrice, à laquelle on ajoute le vecteur* $\mathbf{b} = \mathbf{0}$, *on tire :*

$$\begin{aligned} x_1 - \frac{5}{7}x_3 &= 0 \\ x_2 - \frac{3}{7}x_3 &= 0. \end{aligned}$$

*Avec* $x_3 = s$, *la solution complète est :*

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{5}{7}s \\ x_2 &= \frac{3}{7}s \\ x_3 &= s. \end{aligned}$$

# Exercices

1. Voici une autre façon d'obtenir l'inverse d'une matrice $\boldsymbol{A}$ :

   (a) Construire la matrice $\boldsymbol{B} = [\boldsymbol{A} \ \boldsymbol{I}]$

   (b) Par des transformations élémentaires sur les lignes de $\boldsymbol{B}$, obtenir $\boldsymbol{I}$ à la place de $\boldsymbol{A}$.

   On trouve ainsi $\boldsymbol{A}^{-1}$ à la place de $\boldsymbol{I}$ .
   Par cette méthode, calculer l'inverse des matrices de l'exercice 20 du chapitre 8.
   Que se passe-t-il avec la matrice $\boldsymbol{B}$?

2. Trouver le rang des matrices suivantes en les réduisant à leur forme normale :

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & -6 \\ 7 & 0 & 4 \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 6 & 3 \\ 2 & 4 & 2 \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}.$$

3. Résoudre les systèmes d'équations suivants :

   (a) $$\begin{array}{rrrcr} x_1 & +2x_2 & -x_3 & = & 2 \\ x_1 & -2x_2 & -3x_3 & = & -6 \\ x_1 & +4x_2 & +4x_3 & = & 3 \end{array}$$

   (b) $$\begin{array}{rcr} -x_1 + x_2 + 3x_3 & = & 12 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 & = & -8 \\ 4x_1 + x_2 - 4x_3 & = & 15 \end{array}.$$

4. Soit le système :

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - 2x_3 + 4x_4 &= 6 \\ -3x_1 - 3x_2 + 6x_3 - 12x_4 &= b \end{aligned}$$

   (a) Pour quelle valeur de $b$ le système est-il possible?

   (b) Donner à $b$ la valeur trouvée sous (a) et calculer la solution complète du système.

5. Soit le système d'équations :

$$\begin{array}{rrrcl} 2x_1 & -x_2 & -3x_3 & = & 0 \\ -x_1 & & +2x_3 & = & 0 \\ 2x_1 & -3x_2 & -x_3 & = & 0 \end{array}$$

   (a) Ce système est-il compatible? Pourquoi?

   (b) Possède-t-il une solution unique? Pourquoi?

6. Trouver toutes les solutions des deux systèmes d'équations linéaires homogènes suivants :

$$\text{(a)}\quad \begin{array}{rrrcl} -3x_1 & +x_2 & +2x_3 & = & 0 \\ -2x_1 & & +2x_3 & = & 0 \\ -11x_1 & +6x_2 & +5x_3 & = & 0 \end{array}$$

$$\text{(b)}\quad \begin{array}{rrrrcl} x_1 & +x_2 & +3x_3 & +x_4 & = & 0 \\ x_1 & +3x_2 & +2x_3 & +4x_4 & = & 0 \\ 2x_1 & & +x_3 & -x_4 & = & 0 \end{array} \; .$$

7. Soit le système d'équations linéaires suivant :

$$\begin{aligned} x + y - z &= 1 \\ 2x + 3y + \beta z &= 3 \; . \\ x + \beta y + 3z &= 2 \end{aligned}$$

   Déterminer les valeurs de $\beta$ de telle sorte que ce système d'équations possède :

   (a) aucune solution ;

   (b) une solution unique ;

   (c) une infinité de solutions.

# Chapitre 10

# Vecteurs et espaces vectoriels

## 10.1 Introduction

Ce chapitre aborde un aspect plus géométrique de l'algèbre linéaire. Pour résoudre un problème, il est souvent utile de se situer dans un système à deux ou à trois dimensions pour pouvoir le visualiser. C'est pourquoi nous introduisons les notions de **vecteur** et d'**espace vectoriel**.

## 10.2 Les vecteurs

Par vecteur, nous entendons toujours vecteur-colonne. Chaque colonne d'une matrice peut être considérée comme un vecteur. Les vecteurs-ligne sont les transposés des vecteurs-colonne. Chaque ligne d'une matrice peut être considérée comme la transposée d'un vecteur. Les éléments d'un vecteur sont appelés composantes du vecteur (toujours des nombres réels). Un vecteur peut donc avoir 1 ou 2 ou ... ou $m$ composantes.

- **Vecteur unité**

  Un vecteur dont la $i^{\text{e}}$ composante est 1 et dont tous les autres éléments sont zéro est appelé **vecteur unité** et est noté $\boldsymbol{u_i}$.

**Exemple 10.1** *Pour des vecteurs à 4 composantes, il y a 4 vecteurs unités :*

$$\boldsymbol{u_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{u_2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{u_3} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{u_4} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

- **Vecteur nul**

  Un vecteur dont toutes les composantes sont nulles est appelé vecteur nul et est noté **0**.

## 10.3 Interprétation géométrique des vecteurs

Nous savons qu'un point dans l'espace à deux dimensions est représenté par une paire de nombres. Nous pouvons alors dire qu'un vecteur à deux composantes définit un point dans l'espace à deux dimensions. Cette constatation nous permet de représenter un vecteur graphiquement. Sur la figure 10.1, le point A est défini par le vecteur $\boldsymbol{x}' = [x_1 \quad x_2]$. Le **segment orienté** OA (joignant l'origine au point A) représente le vecteur $\boldsymbol{x}$.

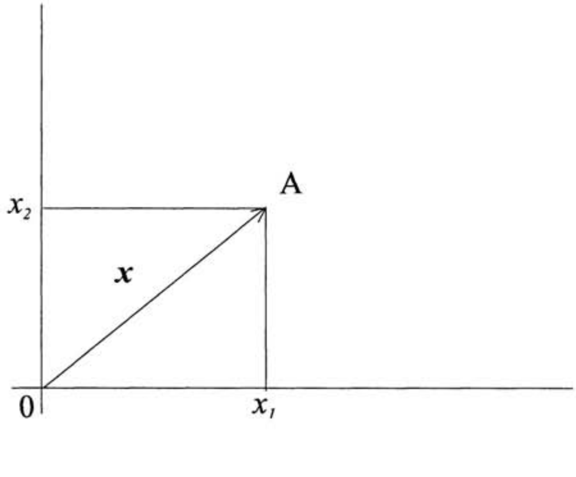



Figure 10.1: Représentation graphique d'un vecteur à deux composantes

La multiplication d'un vecteur par un scalaire revient à multiplier chaque composante par ce scalaire. Considérons la multiplication du vecteur $\boldsymbol{x}$ par

le scalaire 2. Nous avons donc :

$$2\boldsymbol{x}' = 2\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x_1 \\ 2x_2 \end{bmatrix}.$$

Sur la figure 10.2, nous constatons que le vecteur $2\boldsymbol{x}$ correspond au segment orienté OB qui est égal à deux fois le segment OA.

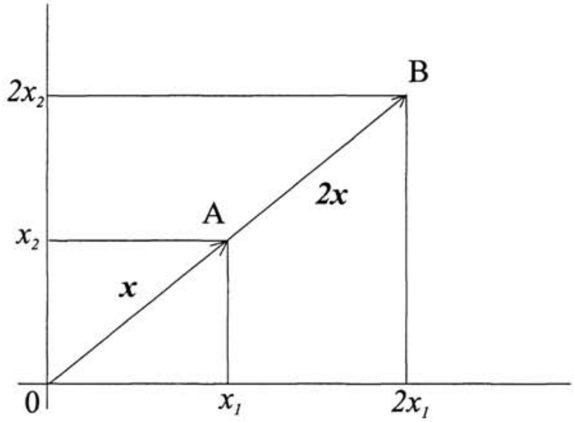



Figure 10.2: Multiplication d'un vecteur par un scalaire

**Exemple 10.2** *Soit le vecteur* $\boldsymbol{x}' = [\ -1 \quad 3\ ]$. *Multiplions-le par 3 et représentons les deux vecteurs graphiquement dans la figure 10.3.*

$$3\boldsymbol{x} = 3\begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 9 \end{bmatrix}.$$

La somme de deux vecteurs est un troisième vecteur dont les composantes sont égales à la somme des composantes correspondantes des deux premiers vecteurs. Si $\boldsymbol{x}' = [x_1 \ \ x_2]$ et $\boldsymbol{y}' = [y_1 \ \ y_2]$, $\boldsymbol{x}' + \boldsymbol{y}' = [x_1 + y_1 \ \ x_2 + y_2]$. Sur la figure 10.4, le segment OA correspond au vecteur $\boldsymbol{x}$ tandis que le segment OB correspond au vecteur $\boldsymbol{y}$. Pour faire la somme des deux segments, nous traçons une paralèlle au segment OA à partir du point B et une paralèlle au segment OB à partir du point A. L'intersection de ces deux droites donne le point C. Le segment OC est donc la somme de OA et de OB. Il représente le vecteur $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}$.

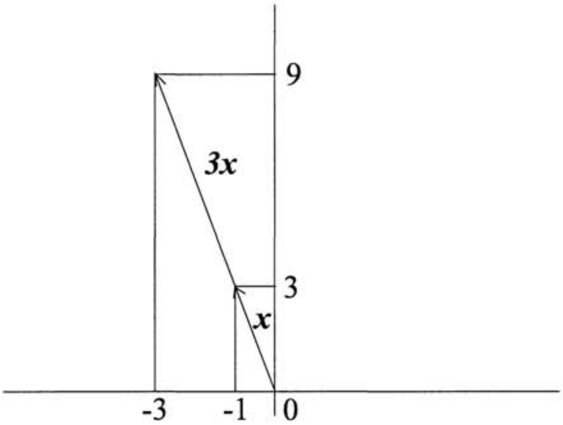



Figure 10.3: Représentation de $\boldsymbol{x}' = [-1\ 3]$ et de $3\boldsymbol{x}' = [-3\ \ 9]$

**Exemple 10.3** *Soient les deux vecteurs* $\boldsymbol{x}' = [2\ \ 0]$ *et* $\boldsymbol{y}' = [-4\ \ 4]$. *Représentons dans la figure 10.5 les vecteurs* $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ *et* $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}$.

$$\boldsymbol{x}' + \boldsymbol{y}' = [2\ \ 0] + [-4\ \ 4] = [-2\ \ 4].$$

Lorsqu'un vecteur a 3 composantes, il faut un espace à 3 dimensions pour pouvoir le représenter graphiquement. En général, on associe à tout vecteur à $n$ composantes un segment dans l'espace à $n$ dimensions.

## 10.4 Longueur d'un vecteur

Du point de vue géométrique, la **longueur** ou **norme** d'un vecteur est la longueur du segment qui le représente. Elle est définie par la **racine carrée de la somme des carrés de ses composantes**. Pour un vecteur $\boldsymbol{x}$ à $n$ composantes, sa longueur, notée par $\| \boldsymbol{x} \|$ est définie par l'expression :

$$\| \boldsymbol{x} \| = \left[ \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \right]^{1/2}.$$

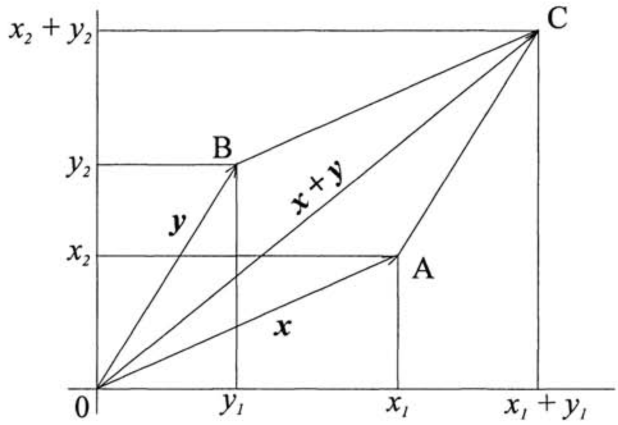



Figure 10.4: Addition de deux vecteurs

**Exemple 10.4** *Calculons la longueur du vecteur à 3 composantes suivant :*

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} -4 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$\| \boldsymbol{x} \| = ((-4)^2 + (0)^2 + (3)^2)^{1/2} = (16 + 0 + 9)^{1/2} = 25^{1/2} = 5.$$

## 10.5 Produit scalaire de deux vecteurs

Soient $\boldsymbol{x}$ et $\boldsymbol{y}$ deux vecteurs de même forme, leur **produit scalaire** est défini par la somme des produits des éléments correspondants. Si $\boldsymbol{x}$ et $\boldsymbol{y}$ sont des vecteurs à $n$ composantes, le produit intérieur s'exprime par :

$$\boldsymbol{x}' \cdot y = \boldsymbol{y}' \cdot x = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = \sum_{i=1}^{n} y_i x_i.$$

Les vecteurs $\boldsymbol{x}$ et $\boldsymbol{y}$ pouvant être considérés comme des matrices, nous remarquons que le produit intérieur correspond à la multiplication de matrices. C'est pour que le produit soit possible que l'on écrit : $\boldsymbol{x}' \cdot \boldsymbol{y}$ ou $\boldsymbol{y}' \cdot \boldsymbol{x}$. En effet, le nombre de composantes de $\boldsymbol{x}$ et $\boldsymbol{y}$ étant $(n \times 1)$, il faut donc transposer l'un ou l'autre des vecteurs pour pouvoir effectuer la multiplication.

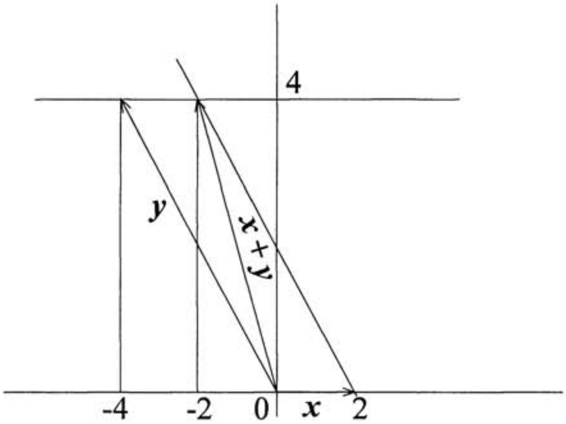



Figure 10.5: Représentation de $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ et $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}$

**Exemple 10.5** *Soient les vecteurs à 2 composantes* $\boldsymbol{x}' = [3 \;\; 1]$ *et* $\boldsymbol{y}' = [-4 \;\; 5]$, *alors :*

$$\boldsymbol{x}' \cdot y = \sum_{i=1}^{2} x_i y_i = 3 \cdot (-4) + 1 \cdot 5 = -7 \text{ ou}$$

$$\boldsymbol{y}' \cdot x = \sum_{i=1}^{2} y_i x_i = (-4) \cdot 3 + 5 \cdot 1 = -7.$$

## 10.6 Vecteurs orthogonaux

Si le produit scalaire de deux vecteurs est nul, on dit que les deux vecteurs sont **orthogonaux**. Du point de vue géométrique, deux vecteurs orthogonaux sont **perpendiculaires**. Si plus de deux vecteurs orthogonaux ont une longueur égale à 1, on dit qu'ils sont **orthonormaux**.

**Exemple 10.6** *Soient les deux vecteurs à deux composantes suivants, calculons le produit scalaire et représentons-les sur la figure 10.6 :*

$$\boldsymbol{x}' = [3 \;\; -2], \quad \boldsymbol{y}' = [4 \;\; 6].$$

*Le produit scalaire est égal à :*

$$\boldsymbol{x}' \cdot \boldsymbol{y} = 12 - 12 = 0.$$

*Les deux vecteurs sont donc orthogonaux.*

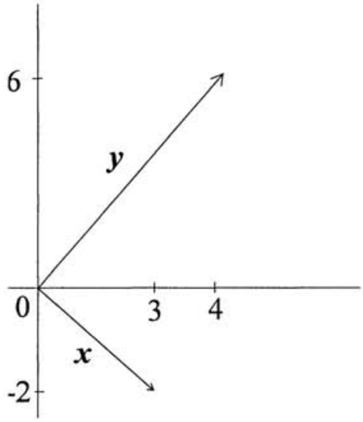



Figure 10.6: Vecteurs orthogonaux

Si $\boldsymbol{x}$ et $\boldsymbol{y}$ sont deux vecteurs à $n$ composantes, alors on a les deux inégalités suivantes :

**Inégalité de Cauchy-Schwarz** $\quad | \boldsymbol{x}' \cdot \boldsymbol{y} | \leq \| \boldsymbol{x} \| \cdot \| \boldsymbol{y} \|$

où $| \boldsymbol{x}' \cdot \boldsymbol{y} |$ représente la valeur absolue du produit scalaire, $\| \boldsymbol{x} \|$ la norme de $\boldsymbol{x}$ et $\| \boldsymbol{y} \|$ la norme de $\boldsymbol{y}$.

**Inégalité de Minkowsky** $\quad \| \boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} \| \leq \| \boldsymbol{x} \| + \| \boldsymbol{y} \|.$

Cela signifie que la longueur de la somme de deux vecteurs ne peut pas excéder la somme de leur longueur.

## 10.7 Dépendance linéaire

Soient les $m$ vecteurs à $n$ composantes $\boldsymbol{x_1}$, $\boldsymbol{x_2}$ ,. . .,$\boldsymbol{x_m}$. On dit qu'ils sont **linéairement dépendants** si et seulement s'il existe des constantes $c_1, c_2, \ldots, c_m$

dont une au moins est différente de zéro, telles que :

$$c_1\boldsymbol{x_1} + c_2\boldsymbol{x_2} + \ldots + c_m\boldsymbol{x_m} = \mathbf{0}.$$

Dans le cas contraire, les vecteurs sont **linéairement indépendants**.

**Exemple 10.7** *Soit :*

$$\boldsymbol{x_1} = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ -3 \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{x_2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{x_3} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -4 \end{bmatrix}$$

*L'équation* $c_1\boldsymbol{x_1}+c_2\boldsymbol{x_2}+c_3\boldsymbol{x_3}= \mathbf{0}$ *nous donne :*

$$c_1 \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ -3 \end{bmatrix} + c_2 \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} + c_3 \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

*En développant, nous avons :*

$$\begin{array}{rcrcrcl} -c_1 & + & 0c_2 & - & c_3 & = & 0 \\ -2c_1 & + & 2c_2 & + & 0c_3 & = & 0 \\ -3c_1 & - & c_2 & - & 4c_3 & = & 0 \end{array}$$

*ce qui représente un système homogène de 3 équations linéaires. Nous devons résoudre ce système et voir s'il existe un* $c_i$ *différent de zéro* $(i = 1, 2, 3)$*. Nous savons comment résoudre un système homogène sous forme matricielle. Nous cherchons le rang de la matrice des coefficients et nous nous souvenons qu'il suffit que le rang de* $\boldsymbol{A}$ *soit inférieur au nombre de variables pour qu'il y ait des solutions non-triviales. Or, s'il existe un* $c_i$ *différent de zéro, cela signifie justement qu'il y a des solutions non triviales. Nous arrivons donc à une deuxième définition.*

Les $m$ vecteurs $\boldsymbol{x_i}$ sont **dépendants** si le système homogène $\boldsymbol{Ac} = \mathbf{0}$ admet des solutions non triviales, avec $\boldsymbol{A}$ la matrice d'ordre $(n \times m)$ ayant pour colonnes les $m$ vecteurs $\boldsymbol{x_1},\ldots,\boldsymbol{x_m}$ et $\boldsymbol{c}$ le vecteur des $m$ constantes $c_1, \ldots, c_m$.

Dans l'exemple 10.7, nous avons :

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 \\ -2 & 2 & 0 \\ -3 & -1 & -4 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \boldsymbol{c} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix}.$$

Nous cherchons le rang de $\boldsymbol{A}$ par les transformations élémentaires :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 2 & 0 \\ -3 & -1 & -4 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Le rang de $\boldsymbol{A}$ est égal à 2. Il existe donc des solutions non triviales puisque $r = 2 < n = 3$. Les vecteurs sont linéairement dépendants.

## 10.8 Combinaison linéaire

On dit que le vecteur $\boldsymbol{y}$ est une **combinaison linéaire** des vecteurs $\boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{x_2}, \ldots, \boldsymbol{x_m}$ s'il existe des constantes $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ telles que :

$$\boldsymbol{y} = \lambda_1 \boldsymbol{x_1} + \lambda_2 \boldsymbol{x_2} + \ldots + \lambda_m \boldsymbol{x_m}.$$

**Exemple 10.8** *Reprenons les 3 vecteurs de l'exemple 10.7 et regardons si $\boldsymbol{x_3}$ est une combinaison linéaire de $\boldsymbol{x_1}$ et $\boldsymbol{x_2}$. Nous avons :*

$$\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -4 \end{bmatrix} = \lambda_1 \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ -3 \end{bmatrix} + \lambda_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} \quad \textit{ce qui donne :}$$

$$\begin{aligned} -\lambda_1 &= -1 \\ -2\lambda_1 + 2\lambda_2 &= 0 \\ -3\lambda_1 - \lambda_2 &= -4. \end{aligned}$$

*Nous pouvons résoudre ce système : de la 1^re^ équation, nous tirons $\lambda_1 = 1$ que nous remplaçons dans la 2^e^ ou la 3^e^ équation :*

$$\begin{aligned} -2 \cdot 1 + 2\lambda_2 &= 0 \\ 2\lambda_2 &= 2 \\ \lambda_2 &= 1 \end{aligned}$$

*$\boldsymbol{x_3}$ est une combinaison linéaire de $\boldsymbol{x_1}$ et $\boldsymbol{x_2}$ car $\boldsymbol{x_3} = \boldsymbol{x_1} + \boldsymbol{x_2}$.*

## 10.9 Propriétés des vecteurs

**Propriété 1**

Si les $m$ vecteurs $\boldsymbol{x}_1$, $\boldsymbol{x}_2$, …, $\boldsymbol{x}_\mathrm{m}$ sont linéairement dépendants, au moins l'un d'entre eux est une combinaison linéaire des autres.

**Propriété 2**

Si $m > n$, $m$ vecteurs à $n$ composantes sont forcément linéairement dépendants.

**Propriété 3**

Les vecteurs correspondant aux colonnes d'une matrice non singulière sont linéairement indépendants (il en est de même pour les lignes).

**Propriété 4**

Les vecteurs correspondant aux colonnes d'une matrice singulière sont dépendants (il en est de même pour les lignes).

**Propriété 5**

Si une matrice est d'ordre $(m \times n)$ avec $n > m$, les vecteurs correspondant aux colonnes sont linéairement dépendants.

**Propriété 6**

Le rang d'une matrice ne peut pas être supérieur au nombre de vecteurs linéairement indépendants.

**Propriété 7**

Si le rang d'une matrice d'ordre $(m \times n)$ est égal à $r$, il y a exactement $r$ colonnes et $r$ lignes linéairement indépendantes.

## 10.10 Espaces vectoriels

Un **espace vectoriel** à $n$ dimensions peut être défini comme étant l'ensemble de tous les vecteurs à $n$ composantes. Soient $\boldsymbol{x}_\mathrm{a}$ et $\boldsymbol{x}_\mathrm{b}$ deux vecteurs appartenant à cet ensemble. On vérifie facilement que :

- le vecteur $(\boldsymbol{x}_\mathrm{a}+\boldsymbol{x}_\mathrm{b})$ est un vecteur du même ensemble ;
- le vecteur $\lambda\boldsymbol{x}_\mathrm{a}$, où $\lambda$ est un scalaire, c'est à nouveau un vecteur du même ensemble.

On dit alors qu'un espace vectoriel est un ensemble de vecteurs fermé par rapport à l'addition et à la multiplication scalaire.

**Exemple 10.9** *Considérons l'ensemble de tous les vecteurs à 2 composantes.*

$$\textit{Soient} \quad \boldsymbol{x}_a = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} \quad \textit{et} \quad \boldsymbol{x}_b = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix}$$

*nous vérifions que* $\boldsymbol{x}_a + \boldsymbol{x}_b$ *appartient à l'ensemble et que* $\lambda\boldsymbol{x}_a$, *avec* $\lambda = 2$, *appartient aussi à l'ensemble :*

$$\boldsymbol{x}_a + \boldsymbol{x}_b = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

*Le vecteur* $\begin{bmatrix} 5 \\ -2 \end{bmatrix}$ *est bien un vecteur à 2 composantes.*

$$\lambda\boldsymbol{x}_a = 2\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -4 \end{bmatrix}.$$

*Le vecteur* $\begin{bmatrix} 2 \\ -4 \end{bmatrix}$ *est bien un vecteur à 2 composantes.*

Nous remarquons qu'il y a une infinité de vecteurs dans un espace vectoriel. Toutefois, grâce à l'addition et à la multiplication scalaires, on peut **engendrer** tout l'espace vectoriel à l'aide d'un ou plusieurs vecteurs. Ceci nous amène à la définition de la dimension d'un espace vectoriel.

Par **dimension d'un espace vectoriel**, on entend le nombre maximal de vecteurs linéairement indépendants dans l'espace considéré, ou, ce qui revient au même, le nombre minimal de vecteurs indépendants nécessaires à engendrer tout l'espace considéré.

Nous désignerons, par conséquent, un espace vectoriel par :

$$V_i^j$$

où l'indice $i$ représente le nombre de composantes des vecteurs et l'indice $j$ la dimension de l'espace. Par la propriété 2, nous savons que $j \leq i$. La dimension maximale d'un espace vectoriel est donc égale à la dimension de ses vecteurs.

**Exemple 10.10** *Considérons l'ensemble de tous les vecteurs* $\boldsymbol{x}_i$ *à 3 dimensions qui sont de la forme :*

$$\boldsymbol{x}_i' = [s \quad 3s \quad 9s]$$

*où s est un nombre réel quelconque. Il y a une infinité de vecteurs de ce type, mais, grâce à la multiplication scalaire, on peut engendrer tout l'espace vectoriel en partant par exemple du vecteur* $\boldsymbol{x}' = [1 \quad 3 \quad 9]$. *En d'autres termes, un seul vecteur suffit à engendrer tous les autres vecteurs. La dimension de cet espace vectoriel est donc égale à 1 et on écrit* $V_3^1$.

Dans l'exemple 10.9, nous pouvons engendrer tous les vecteurs $\boldsymbol{y}$ à 2 composantes à l'aide d'une combinaison linéaire des deux vecteurs unité $\boldsymbol{u_1}$ et $\boldsymbol{u_2}$. En effet,

$$\boldsymbol{y} = y_1\boldsymbol{u_1} + y_2\boldsymbol{u_2}.$$

$\boldsymbol{u_1}$ et $\boldsymbol{u_2}$ sont indépendants. Par conséquent, la dimension de l'espace vectoriel est égale à 2. Dans ce cas, au lieu d'écrire $V_2^2$, étant donné que les deux indices se confondent, on écrit simplement $V_2$ et on parle alors d'un **espace vectoriel à 2 dimensions complet**. Nous pouvons généraliser cette notion et noter par $V_n$ un espace vectoriel à $n$ dimensions complet.

## 10.11 Bases

Une **base** de l'espace vectoriel $V_n^r$ est un ensemble de $r$ vecteurs linéairement indépendants appartenant à cet espace vectoriel et qui engendre $V_n^r$.

Dans l'exemple 10.10, le vecteur $\boldsymbol{x}' = [1 \quad 3 \quad 9]$ est une base pour $V_3^1$. Dans l'exemple 10.9, les deux vecteurs unité $\boldsymbol{u}_1' = [1 \quad 0]$ et $\boldsymbol{u}_2' = [0 \quad 1]$ forment une base pour $V_2$. Les deux vecteurs $[1 \quad 2]$ et $[2 \quad 5]$ sont aussi une base pour $V_2$. En revanche, les deux vecteurs $[2 \quad -2]$ et $[4 \quad -4]$ ne forment pas une base pour $V_2$ car ils sont linéairement dépendants. Il y a donc plusieurs bases possibles pour un espace vectoriel. Chaque base d'un espace vectoriel contient le même nombre de vecteurs linéairement indépendants.

**Tout vecteur dans l'espace $\mathbf{V_n^r}$ peut être représenté par une combinaison linéaire unique des $r$ vecteurs de base.**

Nous pouvons distinguer plusieurs types de bases :

- **base canonique** : formée de vecteurs unité $\boldsymbol{u}_\mathbf{i}$ ;
- **base orthonormale** : formée de vecteurs orthogonaux et de longueur égale à 1 ;
- **base orthogonale** : formée de vecteurs orthogonaux ;
- **base quelconque** : formée de vecteurs linéairements indépendants.

Nous allons illustrer ces notions par l'exemple 10.11.

**Exemple 10.11** *Considérons l'espace vectoriel $V_2$. Pour former une base, il faut deux vecteurs linéairement indépendants. Prenons plusieurs bases différentes :*

- *base canonique représentée par les vecteurs* $\boldsymbol{u}'_1 = [0 \quad 1]$ *et* $\boldsymbol{u}'_2 = [0 \quad 1]$
- *base orthogonale représentée par les vecteurs* $\boldsymbol{x}'_1 = [1 \quad -2]$ *et* $\boldsymbol{x}'_2 = [2 \quad 1]$
- *base quelconque représentée par les vecteurs* $\boldsymbol{x}'_3 = [1 \quad 2]$ *et* $\boldsymbol{x}'_4 = [3 \quad 2]$.

*Nous allons représenter graphiquement le vecteur* $\boldsymbol{y}' = [3 \quad 4]$ *en fonction des trois bases ci-dessus.*

*Pour la base canonique, les deux vecteurs unité se trouvent respectivement en abscisse et en ordonnée (Figure 10.7). Tout vecteur à deux composantes définit un point dans le plan, point qui peut être représenté par une paire de valeurs correspondant à l'abscisse et à l'ordonnée. Or, un point en abscisse est un multiple de* $\boldsymbol{u_1}$ *et un point en ordonnée est un multiple de* $\boldsymbol{u_2}$*. Tout vecteur est donc une combinaison linéaire unique de* $\boldsymbol{u_1}$ *et* $\boldsymbol{u_2}$*. Le vecteur* $\boldsymbol{y}$ *s'exprime alors par la combinaison linéaire unique :*

$$\boldsymbol{y} = 3\boldsymbol{u_1} + 4\boldsymbol{u_2}.$$

*Nous représentons* $\boldsymbol{y}$ *sur la figure 10.7. La représentation d'un vecteur en termes de la base canonique équivaut donc à la représentation de ce vecteur en termes de coordonnées ordinaires. Considérons maintenant la base orthogonale composée des vecteurs* $\boldsymbol{x}'_1 = [1 \quad -2]$ *et* $\boldsymbol{x}'_2 = [2 \quad 1]$*. Nous représentons cette base sur la figure 10.8. Les droites où se trouvent* $\boldsymbol{x_1}$ *et* $\boldsymbol{x_2}$ *forment les nouveaux axes perpendiculaires. Une base orthogonale correspond donc à une rotation des axes définis par la base canonique. Tout vecteur peut maintenant être représenté en fonction de ces nouvelles coordonnées, c'est-à-dire par une combinaison linéaire unique de* $\boldsymbol{x_1}$ *et* $\boldsymbol{x_2}$*. Le même vecteur* $\boldsymbol{y}' = [3 \quad 4]$ *est donc égal à :*

$$\boldsymbol{y} = x_1\boldsymbol{x_1} + x_2\boldsymbol{x_2}.$$

*Nous devons trouver la nouvelle abscisse* $x_1$ *et la nouvelle ordonnée* $x_2$ *pour pouvoir représenter le vecteur* $\boldsymbol{y}$ *en fonction de la base* $\boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{x_2}$*. Pour ce faire, nous remplaçons* $\boldsymbol{y}$*,* $\boldsymbol{x_1}$ *et* $\boldsymbol{x_2}$ *par leurs valeurs et obtenons :*

$$\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} = x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

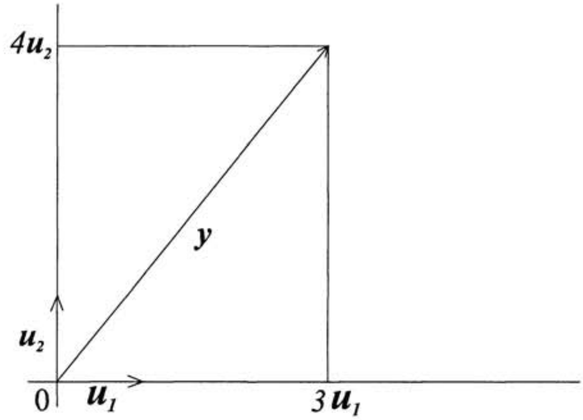



Figure 10.7: Représentation graphique de la base canonique et du vecteur $\boldsymbol{y}$ en fonction de cette base

*En développant, cela donne 2 équations à 2 inconnues* $x_1$ *et* $x_2$ *:*

$$\begin{array}{rcrcl} x_1 & + & 2x_2 & = & 3 \\ -2x_1 & + & x_2 & = & 4 \end{array}$$

*Nous résolvons ce système en soustrayant deux fois la deuxième équation de la première, ce qui donne :*

$$5x_1 = -5 \quad \Rightarrow \quad x_1 = -1$$

*et nous remplaçons* $x_1 = -1$ *dans la première équation pour obtenir :*

$$-1 + 2x_2 = 3 \;\; \Rightarrow \;\; 2x_2 = 4 \;\; \Rightarrow \;\; x_2 = 2.$$

*Nous avons donc trouvé les nouvelles coordonnées de* $\boldsymbol{y}$ *qui peut s'écrire :*

$$\boldsymbol{y} = -\boldsymbol{x_1} + 2\boldsymbol{x_2}.$$

*Nous pouvons alors le représenter sur la figure 10.8.*
*Prenons enfin la troisième base. Nous avons une base quelconque formée des deux vecteurs* $\boldsymbol{x}'_3 = [1 \ \ 2]$ *et* $\boldsymbol{x}'_4 = [3 \ \ 2]$.
*Nous représentons cette nouvelle base sur la figure 10.9. Les droites où se trouvent* $\boldsymbol{x_3}$ *et* $\boldsymbol{x_4}$ *forment les nouveaux axes qui, cette fois, ne sont pas*

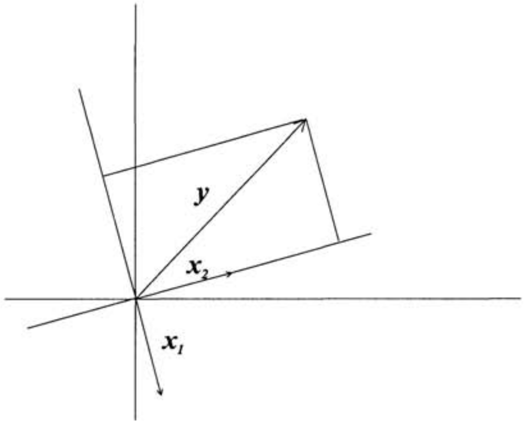



Figure 10.8: Représentation graphique de la base orthogonale et du vecteur $\boldsymbol{y}$ en fonction de cette base

*perpendiculaires. Cependant, il est toujours vrai que tout vecteur peut être représenté par une combinaison linéaire unique des vecteurs* $\boldsymbol{x_3}$ *et* $\boldsymbol{x_4}$*. Le vecteur* $\boldsymbol{y}$ *est donc égal à :*

$$\boldsymbol{y} = x_3\boldsymbol{x_3} + x_4\boldsymbol{x_4}.$$

*À nouveau, nous devons trouver les nouvelles coordonnées* $x_3$ *et* $x_4$ *pour pouvoir représenter le vecteur* $\boldsymbol{y}$ *en fonction de la base* $\boldsymbol{x_3}, \boldsymbol{x_4}$*. Nous procédons de la même manière et obtenons :*

$$\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} = x_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + x_4 \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

*Le système est le suivant :*

$$\begin{array}{rcrcl} x_3 & + & 3x_4 & = & 3 \\ 2x_3 & + & 2x_4 & = & 4 \end{array}$$

*et les solutions sont* $x_3 = \frac{3}{2}$ *et* $x_4 = \frac{1}{2}$.
*Le vecteur* $\boldsymbol{y}$ *peut donc s'écrire :*

$$\boldsymbol{y} = \frac{3}{2}\boldsymbol{x_3} + \frac{1}{2}\boldsymbol{x_4}.$$

*Nous le représentons sur la figure 10.9.*

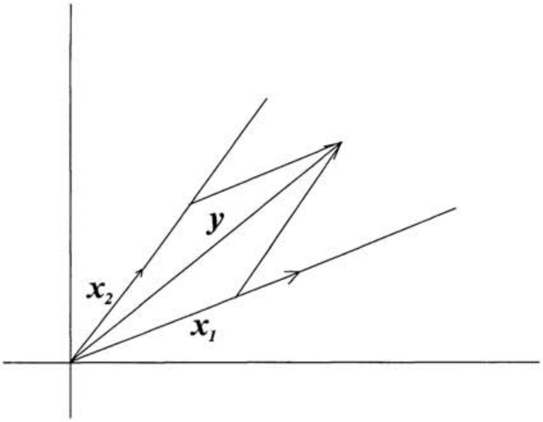



Figure 10.9: Représentation graphique de la base quelconque et du vecteur $\boldsymbol{y}$ en fonction de cette base

## 10.12 Valeurs et vecteurs propres

Le problème des valeurs et vecteurs propres se pose en ces termes : soit une matrice carrée $\boldsymbol{A}$ d'ordre $n$, existe-t-il un vecteur $\boldsymbol{x}$ non nul et un scalaire $\lambda$ tels que :

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \lambda \boldsymbol{x}$$

soit vrai ?

En d'autres termes, on cherche s'il existe un vecteur $\boldsymbol{x}$ qui en le multipliant par $\boldsymbol{A}$ nous donne un multiple de lui-même. Les valeurs de $\lambda$ qui satisfont cette relation s'appellent les **valeurs propres** de la matrice $\boldsymbol{A}$ et les vecteurs $\boldsymbol{x}$ s'appellent **vecteurs propres** de la matrice $\boldsymbol{A}$.

Nous pouvons récrire cette relation de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} &= \lambda \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} - \lambda \boldsymbol{x} &= \boldsymbol{0} \\ (\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{I}) \cdot \boldsymbol{x} &= \boldsymbol{0}. \end{aligned}$$

Nous voyons que cette forme d'écriture correspond à un système d'équations homogène. Il est évident que le vecteur $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ est solution, mais existe-t-il d'autres solutions? Nous savons déjà que, pour qu'il y ait des solutions non triviales, il est nécessaire et suffisant que le déterminant de $(\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{I})$ soit

égal à zéro. Pour résoudre notre problème, nous devons donc trouver des valeurs pour $\lambda$ qui annulent $|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{I}|$. Puis nous calculons pour chaque valeur de $\lambda$ le vecteur $\boldsymbol{x}$ qui lui est associé.

Le déterminant $|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{I}|$ pour toute matrice $\boldsymbol{A}$ d'ordre $n$ est une fonction de $\lambda$ et plus exactement un polynôme de degré $n$ en $\lambda$. Nous savons que tout polynôme de degré $n$ possède au plus $n$ racines. Par conséquent, nous aurons au plus $n$ solutions (pas nécessairement toutes distinctes).

Si la matrice $\boldsymbol{A}$ possède $n$ valeurs propres distinctes, alors les $n$ vecteurs propres associés sont linéairement indépendants et forment une base de l'espace (de dimension $n$).

**Exemple 10.12** *Soit la matrice* $\boldsymbol{A}$ *d'ordre 3 suivante :*

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

*Nous allons voir s'il existe des valeurs de* $\lambda$ *et des vecteurs* $\boldsymbol{x}$ *tels que* $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}= \lambda\boldsymbol{x}$. *Nous formons tout d'abord la matrice* $(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{I})$ *:*

$$\begin{aligned} \boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{I} &= \begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 4-\lambda & 3 & 2 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ -2 & 2 & -\lambda \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

*Nous calculons le déterminant de* $(\boldsymbol{A} - \lambda\boldsymbol{I})$ *en développant les cofacteurs de la deuxième ligne :*

$$\begin{aligned} |\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{I}| &= (1-\lambda)[(4-\lambda)(-\lambda)-(2)(-2)] \\ &= (1-\lambda)(-4\lambda+\lambda^2+4). \end{aligned}$$

*Si nous développons cette expression, nous trouvons un polynôme en* $\lambda$ *du troisième degré :*

$$\begin{aligned} |\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{I}| &= -4\lambda+\lambda^2+4+4\lambda^2-\lambda^3-4\lambda \\ &= -\lambda^3+5\lambda^2-8\lambda+4. \end{aligned}$$

*Cependant, pour trouver les solutions de* $|\boldsymbol{A}-\lambda\ \boldsymbol{I}|= 0$*, il est préférable de prendre l'expression* $(1-\lambda)(-4\lambda+\lambda^2+4)=0$*. Nous avons une première solution qui est :*

$$\begin{aligned}(1-\lambda) &= 0\\ \lambda_1 &= 1.\end{aligned}$$

*Les deux autres solutions se trouvent en posant :*

$$\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0$$

*que nous pouvons factoriser en :*

$$(\lambda-2)(\lambda-2)=0.$$

*Nous avons donc* $\lambda_2 = 2$ *et* $\lambda_3 = 2$*. On voit que la racine* $\lambda = 2$ *intervient deux fois. Il reste à trouver les vecteurs associés à* $\lambda = 1$ *et à* $\lambda = 2$*. En remplaçant* $\lambda$ *par 1 dans* $(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{I})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$*, nous obtenons :*

$$\begin{bmatrix} 4-1 & 3 & 2\\ 0 & 1-1 & 0\\ -2 & 2 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0\\ 0\\ 0\end{bmatrix}.$$

*Nous cherchons* $x_1$*,* $x_2$*,* $x_3$ *:*

$$\begin{bmatrix} 3 & 3 & 2\\ 0 & 0 & 0\\ -2 & 2 & -1\end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2/3\\ 0 & 0 & 0\\ -2 & 2 & -1\end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2/3\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 4 & 1/3\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2/3\\ 0 & 4 & 1/3\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2/3\\ 0 & 1 & 1/12\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 7/12\\ 0 & 1 & 1/12\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

*ce qui donne :*

$$x_1 + \frac{7}{12}x_3 = 0$$

$$x_2 + \frac{1}{12}x_3 = 0.$$

*et avec* $x_3 = s$, $s \neq 0$, *nous avons la solution suivante :*

$$\begin{aligned} x_1 &= -\frac{7}{12}s \\ x_2 &= -\frac{1}{12}s \\ x_3 &= s. \end{aligned}$$

*Le vecteur* $\boldsymbol{x}' = [-\frac{7}{12}s \quad -\frac{1}{12}s \quad s]$ *est donc un vecteur propre associé à* $\lambda = 1$. *On vérifie aisément que* $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{x}$.
*Pour* $\lambda = 2$, *nous avons le système suivant :*

$$\begin{bmatrix} 4-2 & 3 & 2 \\ 0 & 1-2 & 0 \\ -2 & 2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

*Nous cherchons* $x_1$, $x_2$, $x_3$ *:*

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ -2 & 2 & -2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} -2 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

*ce qui donne :*

$$\begin{aligned} x_1 + x_3 &= 0 \\ x_2 &= 0 \end{aligned}$$

*et avec* $x_1 = t$, $t \neq 0$, *nous avons la solution :*

$$\begin{aligned} x_1 &= t \\ x_2 &= 0 \\ x_3 &= -t. \end{aligned}$$

*Le vecteur* $\boldsymbol{x}' = \begin{bmatrix} t & 0 & -t \end{bmatrix}$ *est donc un vecteur caractéristique associé à la valeur* $\lambda = 2$. *On vérifie aisément que* $\boldsymbol{Ax} = 2\boldsymbol{x}$.

## 10.13 Diagonalisation de matrices carrées

Une application courante des valeurs et des vecteurs propres est la **diagonalisation** des matrices carrées. Une matrice carrée $(n \times n)$ $\boldsymbol{A}$ est **diagonalisable** s'il existe une matrice carrée $(n \times n)$ $\boldsymbol{D}$ diagonale et une matrice carrée $(n \times n)$ $\boldsymbol{S}$ inversible, telles que $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{SDS}^{-1}$.

**Exemple 10.13** *Posons :* $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{S}=\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{D}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.
*Alors* $\boldsymbol{S}^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ *et*

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\boldsymbol{SDS}^{-1}.$$

- **Méthode de diagonalisation**

  1. Calculer les valeurs propres de $\boldsymbol{A}$.
  2. Chercher les vecteurs propres associés à ces valeurs propres.
  3. Si la matrice possède $n$ vecteurs propres linéairement indépendants (c'est-à-dire si les $n$ vecteurs propres forment une base de l'espace à $n$ dimensions), alors $\boldsymbol{A}$ est diagonalisable et l'on peut passer à l'étape 4. Sinon, $\boldsymbol{A}$ n'est pas diagonalisable et l'on s'arrête là.
  4. La matrice $\boldsymbol{S}$ se construit alors à partir des $n$ vecteurs propres $\boldsymbol{x}_i$ mis en colonne :

  $$\boldsymbol{S}=\begin{pmatrix} | & | & & | \\ \boldsymbol{x}_1 & \boldsymbol{x}_2 & \ldots & \boldsymbol{x}_n \\ | & | & & | \end{pmatrix}.$$

  Notons $\lambda_i$ la valeur propre associée au i[e] vecteur propre $v_i$. Les valeurs propres sont les coefficients de la matrice diagonale $\boldsymbol{D}$ :

  $$\boldsymbol{D}=\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ 0 & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

  Ainsi, $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{SDS}^{-1}$.

**Exemple 10.14** *Soit la matrice* $\boldsymbol{A}$ *:*

$$\boldsymbol{A} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 4 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. *Ses valeurs propres sont :*

$$\lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = 1 \text{ et } \lambda_3 = \frac{1}{2}.$$

2. *Les vecteurs propres correspondants sont :*

$$\boldsymbol{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{x}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } \boldsymbol{x}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

3. *Les vecteurs propres sont linéairement indépendants. On peut donc diagonaliser la matrice* $\boldsymbol{A}$.

4. *On forme la matrice* $\boldsymbol{S}$ *en alignant les vecteurs propres en colonne :*

$$\boldsymbol{S} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

*et en placant les valeurs propres correspondantes sur la diagonale de la matrice la matrice* $\boldsymbol{D}$ *:*

$$\boldsymbol{D} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

*On calcule finalement la matrice inverse :*

$$\boldsymbol{S}^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

*et on vérifie que la relation* $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{SDS}^{-1}$ *est bien établie :*

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{SDS}^{-1} &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ -1 & 2 & -1 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 4 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \boldsymbol{A}.
\end{aligned}$$

- **Propriétés**

1. Le déterminant est invariant par diagonalisation et est égal au produit des valeurs propres, c'est-à-dire :

$$Det\,(\boldsymbol{A}) = Det\,(\boldsymbol{D}) = \lambda_1\lambda_2\cdot\ldots\cdot\lambda_n.$$

En effet,

$$\begin{aligned}
Det\,(\boldsymbol{A}) &= Det\left(\boldsymbol{SDS}^{-1}\right) \\
&= Det\,(\boldsymbol{S})\,Det\,(\boldsymbol{D})\,Det\left(\boldsymbol{S}^{-1}\right) \\
&= Det\,(\boldsymbol{S})\,Det\,(\boldsymbol{D})\,\frac{1}{Det\,(\boldsymbol{S})} \\
&= Det\,(\boldsymbol{D}) \\
&= \lambda_1\lambda_2\cdot\ldots\cdot\lambda_n.
\end{aligned}$$

2. La trace est aussi invariante par diagonalisation et est égale à la somme des valeurs propres, c'est-à-dire :

$$tr\,(\boldsymbol{A}) = tr\,(\boldsymbol{D}) = \lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_n.$$

En effet,

$$\begin{aligned} tr(\boldsymbol{A}) &= tr\left(\boldsymbol{SDS}^{-1}\right) &&= tr\left((\boldsymbol{SD})\,\boldsymbol{S}^{-1}\right) \\ &= tr\left(\boldsymbol{S}^{-1}(\boldsymbol{SD})\right) &&= tr\left(\boldsymbol{S}^{-1}\boldsymbol{SD}\right) \\ &= tr(\boldsymbol{D}) &&= \lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n. \end{aligned}$$

3. Le calcul des puissances est simplifié grâce à la diagonalisation :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{A}^m &= \boldsymbol{SD}^m\boldsymbol{S}^{-1} \\ \text{où } \boldsymbol{D}^m &= \begin{pmatrix} \lambda_1^m & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2^m & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n^m \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

En effet,

$$\begin{aligned} \boldsymbol{A}^m &= \left(\boldsymbol{SDS}^{-1}\right)^m \\ &= \left(\boldsymbol{SDS}^{-1}\right)\left(\boldsymbol{SDS}^{-1}\right)\ldots\left(\boldsymbol{SDS}^{-1}\right) \\ &= \boldsymbol{SDS}^{-1}\boldsymbol{SDS}^{-1}\ldots\boldsymbol{SDS}^{-1} \\ &= \boldsymbol{SD}^m\boldsymbol{S}^{-1}. \end{aligned}$$

# Exercices

1. Déterminer si les vecteurs suivants sont linéairement dépendants :

$$\boldsymbol{v_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{v_2} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{v_3} = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

2. Écrire la matrice $\boldsymbol{D}$ comme combinaison linéaire des matrices $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ et $\boldsymbol{C}$.

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{D} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}.$$

3. Trouver $a$, $b$ et $c$ tels que les trois vecteurs suivants forment une base orthogonale de l'espace à trois dimensions :

$$\boldsymbol{v_1} = \begin{bmatrix} a \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{v_2} = \begin{bmatrix} -14 \\ b \\ 2 \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{v_3} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ c \end{bmatrix}.$$

4. Soit la matrice $\boldsymbol{A}$ suivante :

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & x^2 & 0 \\ 1 & 4 & x \end{bmatrix}.$$

   Pour quelles valeurs de $x$ la matrice $\boldsymbol{A}$ est-elle inversible ?

   (a) Pour $x = 0$, calculer les valeurs propres de $\boldsymbol{A}$.

5. Calculer les valeurs propres et les vecteurs propres pour les matrices suivantes :

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

$$\boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

6. Pour quelles valeurs de $a$ la matrice suivante n'a-t-elle pas de valeur propre réelle ?

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Montrer que $\boldsymbol{B}$ possède deux vecteurs propres linéairement indépendants :

$$\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Montrer qu'une matrice symétrique $2 \times 2$ possède toujours deux valeurs propres (pas forcément distinctes).



## LAGRANGE Joseph Louis (1736-1813)

Mathématicien franco-italien né à Turin en 1736, Lagrange se fait connaître en 1788 grâce à son ouvrage *Mécanique analytique* dans lequel il résume, sous une forme rigoureuse, toutes les connaissances acquises en matière de mécanique depuis Newton. Il enseigne la géométrie à Turin ainsi qu'à Berlin où il remplace Euler à l'Académie des sciences en tant que directeur de mathématiques (1766).

En 1770 et 1771, il publie deux importants mémoires sur la théorie des équations dans lesquels apparaît, pour la première fois, le résultat connu sous le terme de théorème de Lagrange.

On relève encore sa contribution dans le développement de la théorie des nombres, des équations différentielles et de l'analyse ainsi qu'en astronomie.

Lagrange est connu également pour son rôle actif dans l'introduction du système métrique durant la période de la Révolution en France.

# Chapitre 11

# Approche matricielle du calcul différentiel

## 11.1 Introduction

Le calcul différentiel a été abordé dans la première partie de ce livre et le calcul matriciel dans le chapitre 8. Nous allons maintenant voir qu'il est possible de combiner les deux approches dans le but de résoudre des problèmes qui paraissent plus complexes au premier abord, ou qui sont tout au moins d'une plus grande ampleur. Nous verrons également l'optimisation de fonctions de plusieurs variables (avec ou sans contrainte) à l'aide de la matrice hessienne, puis les bases de la régression simple.

## 11.2 Calcul différentiel sous forme matricielle

Soit $\boldsymbol{x}$ un vecteur composé de $n$ variables :

$$\boldsymbol{x}' = (x_1 \; x_2 \ldots x_n),$$

et $\boldsymbol{k}$ un vecteur composé de $n$ constantes :

$$\boldsymbol{k}' = (k_1 \; k_2 \ldots k_n),$$

nous formons la fonction linéaire $y$ suivante :

$$\begin{aligned} y &= \boldsymbol{k}' \cdot \boldsymbol{x} \\ &= (k_1\, k_2 \ldots k_n) \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \\ &= \sum_{i=1}^{n} k_i \cdot x_i. \end{aligned}$$

Nous pouvons calculer la dérivée partielle de $y$ par rapport à chacune des $n$ variables :

$$\begin{gathered} \frac{\partial y}{\partial x_1} = k_1 \\ \frac{\partial y}{\partial x_2} = k_2 \\ \vdots \\ \frac{\partial y}{\partial x_n} = k_n. \end{gathered}$$

Nous regroupons ces $n$ dérivées partielles dans un vecteur à $n$ dimensions :

$$\frac{\partial y}{\partial \boldsymbol{x}} = \boldsymbol{k}'.$$

Considérons maintenant un ensemble de $m$ fonctions linéaires du même type que $y$ :

$$\begin{aligned} y_1 &= \boldsymbol{k_1'} \cdot \boldsymbol{x} \\ y_2 &= \boldsymbol{k_2'} \cdot \boldsymbol{x} \\ &\vdots \\ y_m &= \boldsymbol{k_m'} \cdot \boldsymbol{x}. \end{aligned}$$

Sous forme matricielle, nous avons :

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$$

où $\boldsymbol{y}$ est le vecteur à $m$ dimensions des $y_i$, $\boldsymbol{A}$ la matrice $m \times n$ des constantes où chaque ligne représente un vecteur $\boldsymbol{k}$' et $\boldsymbol{x}$ le vecteur à $n$ dimensions des variables $x_i$.

Les $n$ dérivées partielles de $y_1$, $y_2$, ..., $y_m$ sont :

$$\begin{aligned}\frac{\partial y_1}{\partial \boldsymbol{x}} &= \boldsymbol{k_1}\\ \frac{\partial y_2}{\partial \boldsymbol{x}} &= \boldsymbol{k_2}\\ &\vdots\\ \frac{\partial y_m}{\partial \boldsymbol{x}} &= \boldsymbol{k_m}.\end{aligned}$$

Par conséquent, sous forme matricielle, la dérivée de $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{Ax}$ est :

$$\frac{\partial \boldsymbol{y}}{\partial \boldsymbol{x}} = \frac{\partial \boldsymbol{Ax}}{\partial \boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A}.$$

Soit $\boldsymbol{A}$ une matrice symétrique d'ordre $n$ composée de constantes et $\boldsymbol{x}$ un vecteur composé de $n$ variables, nous pouvons construire la forme quadratique générale :

$$q = \boldsymbol{x}' A \boldsymbol{x}.$$

En développant, on obtient :

$$\begin{array}{llllllllll} q = a_{11}x_1^2 & + & 2a_{12}x_1x_2 & + & \ldots & + & 2a_{1i}x_1x_i & + & \ldots & + & 2a_{1n}x_1x_n \\ & + & 2a_{22}x_2^2 & + & \ldots & + & 2a_{2i}x_2x_i & + & \ldots & + & 2a_{2n}x_2x_n \\ & & & & & & & & & & \vdots \\ & & & & & + & a_{ii}x_i^2 & + & \ldots & + & 2a_{in}x_ix_n \\ & & & & & & & & & & \vdots \\ & & & & & & & & & + & a_{nn}x_n^2. \end{array}$$

La dérivée partielle de $q$ par rapport à la variable $x_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$, est obtenue en sommant les dérivées des termes contenant $x_i$ :

$$\frac{\partial q}{\partial x_i} = 2a_{1i}x_1 + 2a_{2i}x_2 + \ldots + 2a_{ii}x_i + \ldots + 2a_{in}x_n.$$

Comme $\boldsymbol{A}$ est une matrice symétrique, on peut aussi écrire :

$$\begin{aligned}\frac{\partial q}{\partial x_i} &= 2a_{1i}x_1 + 2a_{2i}x_2 + \ldots + 2a_{in}x_n\\ &= 2\boldsymbol{A_i x},\end{aligned}$$

où $\boldsymbol{A}_i$ est la i$^{\text{e}}$ ligne de la matrice $\boldsymbol{A}$. Par conséquent, la dérivée de la forme quadratique $q = \boldsymbol{x}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ peut s'écrire sous forme matricielle :

$$\frac{\partial q}{\partial \boldsymbol{x}} = 2 \begin{bmatrix} \dfrac{\partial q}{\partial x_1} \\ \dfrac{\partial q}{\partial x_2} \\ \vdots \\ \dfrac{\partial q}{\partial x_n} \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} \boldsymbol{A}_1\boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{A}_2\boldsymbol{x} \\ \vdots \\ \boldsymbol{A}_n\boldsymbol{x} \end{bmatrix} = 2\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}.$$

Soit $\boldsymbol{A}$ une matrice d'ordre $m \times n$, où tous les éléments $a_{ij}$ sont une fonction de la variable $\boldsymbol{x}$ :

$$\boldsymbol{A} = [a_{ij}(\boldsymbol{x})].$$

La dérivée de la matrice $\boldsymbol{A}$ par rapport à $x$ est égale à la matrice ayant pour éléments la dérivée (par rapport à $x$) des éléments respectifs de $\boldsymbol{A}$ :

$$\frac{d\boldsymbol{A}}{d\boldsymbol{x}} = \left[\frac{da_{ij}(\boldsymbol{x})}{d\boldsymbol{x}}\right].$$

**Exemple 11.1** *Soient les 3 fonctions linéaires suivantes :*

$$\begin{aligned} y_1 &= x_1 - 2x_2 \\ y_2 &= 4x_1 + x_2 \\ y_3 &= 2x_2. \end{aligned}$$

*Sous forme matricielle, on a :*

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$$

*ou*

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

*La dérivée* $\dfrac{\partial \boldsymbol{y}}{\partial \boldsymbol{x}}$ *est égale à :*

$$\begin{aligned} \frac{\partial \boldsymbol{y}}{\partial \boldsymbol{x}} &= \frac{\partial \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}}{\partial \boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

**Exemple 11.2** *Soit la forme quadratique suivante :*

$$q = x_1^2 + 4x_1x_2 + 6x_1x_3 - 2x_2x_3 + 2x_3^2.$$

*On peut l'écrire sous forme matricielle :*

$$\begin{aligned} q &= \boldsymbol{x}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \\ &= (x_1\ x_2\ x_3)\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

*La dérivée de q est égale à :*

$$\begin{aligned} \frac{\partial q}{\partial \boldsymbol{x}} &= \frac{\partial \boldsymbol{x}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}}{\partial \boldsymbol{x}} = 2\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \\ &= 2\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2x_1 + 4x_2 + 6x_3 \\ 4x_1 - 2x_3 \\ 6x_1 - 2x_2 + 4x_3 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

**Exemple 11.3** *Soit la matrice* $\boldsymbol{A}$ *:*

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 2x & -x & e^x \\ 0 & -2 & 1/x \\ x & \ln x & x^2 \end{bmatrix}.$$

*Sa dérivée est égale à :*

$$\frac{d\boldsymbol{A}}{dx} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & e^x \\ 0 & 0 & -1/x^2 \\ 1 & 1/x & 2x \end{bmatrix}.$$

## 11.3 Matrice hessienne

Otto Hesse, né en 1811 à Königsberg en Allemagne (actuellement Kaliningrad en Russie), a essentiellement contribué au développement de la théorie des fonctions algébriques. Il a introduit la matrice hessienne dans un article datant de 1842 traitant de la recherche sur les courbes quadratiques.

Au point 7.6, nous avons vu comment rechercher les minima et maxima d'une fonction de deux variables. Afin d'élargir ce concept au résultat général sur les fonctions de plusieurs variables, introduisons la matrice des secondes dérivées partielles qui joue un rôle clé dans la détermination des extrema d'une fonction de plusieurs variables. Cette matrice est appelée **matrice hessienne** et se présente sous la forme :

$$\boldsymbol{H} = \begin{pmatrix} f_{x_1^2} & f_{x_1x_2} & \cdots & f_{x_1x_n} \\ f_{x_2x_1} & f_{x_2^2} & \cdots & f_{x_2x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{x_{n-1}x_1} & f_{x_{n-1}x_2} & \cdots & f_{x_{n-1}x_n} \\ f_{x_nx_1} & f_{x_nx_2} & \cdots & f_{x_n^2} \end{pmatrix}$$

où $f_{x_1^2} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}$, $f_{x_1x_2} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}$, ..., et $f_{x_n^2} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}$.

On appelle mineurs principaux de la matrice $\boldsymbol{H}$, notés $\triangle_i$, les déterminants des sous-matrices de $\boldsymbol{H}$ obtenues en lui retirant ses $n - i$ dernières lignes et colonnes ($i = 1, \ldots, n$).

Nous présentons ci-dessous trois méthodes de recherche des extrema d'une fonction de plusieurs variables :

Soit $P \in \mathbb{R}^n$ un point vérifiant $\dfrac{\partial f}{\partial x_1}(P) = \dfrac{\partial f}{\partial x_2}(P) = \ldots = \dfrac{\partial f}{\partial x_n}(P) = 0$, alors on a trois méthode pour déterminer si $P$ est un extremum ou n'en est pas un :

### 1re méthode : Mineurs principaux

- Si les mineurs principaux de la matrice hessienne au point $P$ sont tous strictement positifs, la fonction atteint un minimum au point $P$.
- Si les mineurs principaux de la matrice hessienne au point $P$ sont de signes alternés, le premier étant strictement négatif, la fonction atteint un maximum au point $P$.
- Si ces mineurs principaux ne vérifient pas l'une des conditions ci-dessus prises au sens large (c'est-à-dire "positif ou nul" et "négatif ou nul" respectivement), alors la fonction n'atteint ni un minimum ni un maximum au point $P$.

Dans le cas des fonctions de deux variables, on retrouve le résultat vu au point 7.6 puisque dans ce cas, comme $f_{xy} = f_{yx}$, on a :

$$\begin{aligned} \triangle_1 &= f_{xx} \\ \triangle_2 &= f_{xx}f_{yy} - (f_{xy})^2. \end{aligned}$$

Ainsi,

$\triangle_1 > 0$ et $\triangle_2 > 0 \Longrightarrow$ minimum,
$\triangle_1 < 0$ et $\triangle_2 > 0 \Longrightarrow$ maximum,
$\triangle_1$ quelconque et $\triangle_2 \leq 0 \Longrightarrow$ on ne peut pas conclure.

**2e méthode : Valeurs propres**

De manière équivalente, l'étude des valeurs propres de la matrice hessienne en ce même point $P$ permet de déterminer la nature de ce point.

- Si les valeurs propres de la matrice hessienne $\boldsymbol{H}$ au point $P$ sont toutes strictement positives, alors la fonction atteint un minimum au point $P$.
- Si les valeurs propres de la matrice hessienne $\boldsymbol{H}$ au point $P$ sont toutes strictement négatives, alors la fonction atteint un maximum au point $P$.
- Si la matrice hessienne $\boldsymbol{H}$ en $P$ a au moins deux valeurs propres de signes opposés, alors le point $P$ est un point-selle de la fonction.
- Si les valeurs propres de la matrice hessienne $\boldsymbol{H}$ en $P$ sont toutes de même signe et si au moins une de ces valeurs propres est égale à zéro, alors on ne peut pas conclure.

**3e méthode : Forme quadratique**

L'étude de la forme quadratique issue de la fonction $f$ considérée est une troisième méthode de détermination des extrema de ladite fonction.

Soient $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ qui à $\boldsymbol{x}$ fait correspondre $f(\boldsymbol{x})$, une fonction de $n$ variables dérivable. Supposons également que les dérivées partielles du second ordre soient continues au voisinage du point $P$. Notons $\boldsymbol{H}(P)$ la matrice hessienne de $f$, évaluée au point $P$, et $\boldsymbol{F}'(P) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial f}{\partial x_n} \end{pmatrix}'$ le vecteur-colonne des dérivées partielles de premier ordre.

Le développement de Taylor à l'ordre 2 de la fonction $f$ au voisinage du point $P$ est donné par :

$$f(\boldsymbol{x}) = f(P) + (\boldsymbol{x} - P) \cdot \boldsymbol{F}'(P) + (\boldsymbol{x} - P)' \cdot (\boldsymbol{H}(P) + \boldsymbol{R}(\boldsymbol{x} - P)) \cdot (\boldsymbol{x} - P)$$

où $\boldsymbol{R}$ est une matrice $(n \times n)$ telle que $\lim\limits_{(\boldsymbol{x}-P)\to 0} (\boldsymbol{R}(\boldsymbol{x} - P)) = \boldsymbol{0}$.

On peut alors démontrer, à partir du développement de Taylor ci-dessus, qu'étudier les extrema de la fonction $f$ revient à étudier le signe de la forme quadratique suivante : $Q(\boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{x} - P)' \cdot \boldsymbol{H}(P) \cdot (\boldsymbol{x} - P)$.

- Si la forme quadratique $Q(\boldsymbol{x})$ est définie positive (c'est-à-dire $Q(\boldsymbol{x}) > 0$ pour tout $\boldsymbol{x} \neq P$), alors $f$ atteint un minimum au point $P$.
- Si la forme quadratique $Q(\boldsymbol{x})$ est définie négative (c'est-à-dire $Q(\boldsymbol{x}) < 0$ pour tout $\boldsymbol{x} \neq P$), alors $f$ atteint un maximum au point $P$.
- Si la forme quadratique $Q(\boldsymbol{x})$ est indéfinie (c'est-à-dire s'il existe au moins deux points distincts $\boldsymbol{x}_1$ et $\boldsymbol{x}_2$ tels que $Q(\boldsymbol{x}_1) < 0$ et $Q(\boldsymbol{x}_2) > 0$), alors le point $P$ est un point-selle de la fonction $f$.
- Si la forme quadratique $Q(\boldsymbol{x})$ est semi-définie (c'est-à-dire si $Q(\boldsymbol{x}) \geq 0$ pour tout $\boldsymbol{x} \neq P$ ou si $Q(\boldsymbol{x}) \leq 0$ pour tout $\boldsymbol{x} \neq P$ et s'il existe $\boldsymbol{x}_0$ tel que $Q(\boldsymbol{x}_0) = 0$), alors on ne peut pas conclure.

**Exemple 11.4** *Soit la fonction $z = f(x,y) = x^2 + y^2$. Nous allons étudier les extrema de cette fonction selon les trois méthodes décrites ci-dessus.*
*Les candidats aux extrema s'obtiennent en résolvant le système d'équations $\dfrac{\partial f}{\partial x} = 0$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y} = 0$.*

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= 2x = 0 \Longrightarrow x = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= 2y = 0 \Longrightarrow y = 0. \end{aligned}$$

*Il y a donc un point candidat en $P = (0;0)$ (Figure 11.1). En cherchant les secondes dérivées partielles de $f(x,y)$, on trouve :*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2 \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2 \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0.$$

*La matrice hessienne est donc donnée par :*

$$\boldsymbol{H} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

*Donc,* $\boldsymbol{H}(P) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

- ***1^re^ méthode : Mineurs principaux***
  *On calcule alors les mineurs principaux de* $\boldsymbol{H}(P)$. *On obtient :* $\triangle_1 = 2$ *et* $\triangle_2 = 4$. $\triangle_1$ *et* $\triangle_2$ *sont tous deux strictement positifs, par conséquent, le point* $P$ *est un minimum de* $f$ .

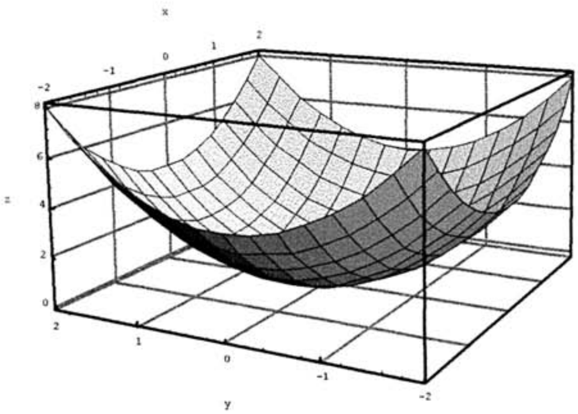



Figure 11.1: Graphe de $z = f(x, y) = x^2 + y^2$

- ***2^e^ méthode : Valeurs propres***
  *Les valeurs propres* $\lambda$ *de* $\boldsymbol{H}(P)$ *vérifient l'équation* $|\boldsymbol{H}(P) - \lambda \boldsymbol{I}| = 0$. *En résolvant cette équation on obtient les valeurs propres* $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$. *Ces valeurs propres sont toutes deux strictement positives, donc la fonction atteint un minimum au point* $P$.

- ***3^e^ méthode : Forme quadratique***
  *Calculons la forme quadratique* $Q(\boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{x} - P)' \cdot \boldsymbol{H}(P) \cdot (\boldsymbol{x} - P)$ :

$$Q(x, y) = \left( \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right)' \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \left( \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

$$= \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix}$$
$$= 2x^2 + 2y^2.$$

*Pour tout* $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \neq P$, $Q(\boldsymbol{x})$ *est strictement positif. Donc* $f$ *atteint un minimum au point* $P$.

**Exemple 11.5** *Soit la fonction :*

$$f(x, y, z) = x^4 - 17x^2 + 2y^2 + z^2 - 2xy - 2yz + 81.$$

*Annulons les premières dérivées partielles :*

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 4x^3 - 34x - 2y = 0 \quad (11.1)$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = 4y - 2x - 2z = 0 \quad (11.2)$$
$$\frac{\partial f}{\partial z} = 2z - 2y = 0. \quad (11.3)$$

*De (11.3) on déduit :*

$$y = z. \quad (11.4)$$

*Substituons (11.4) dans (11.2) :*

$$\begin{aligned} 4y - 2x - 2y &= 0 \\ 2y - 2x &= 0 \\ x &= y. \quad (11.5) \end{aligned}$$

*En introduisant (11.4) et (11.5) dans (11.1), on trouve :*

$$\begin{aligned} 4x^3 - 34x - 2x &= 0 \\ 4x^3 - 36x &= 0 \\ 4x \cdot (x^2 - 9) &= 0. \end{aligned}$$

*Cette dernière équation a trois solutions :*

$$x_1 = 0, \; x_2 = -3, \; x_3 = 3.$$

*Les valeurs correspondantes de y et de z sont :*

$$\begin{aligned} y_1 &= 0, \ y_2 = -3, \ y_3 = 3 \\ z_1 &= 0, \ z_2 = -3, \ z_3 = 3. \end{aligned}$$

*Nous avons donc trois points candidats:* $P_1(0;0;0;81)$, $P_2(-3;-3;-3;0)$ *et* $P_3(3;3;3;0)$.
*Calculons la matrice hessienne :*
*Les deuxièmes dérivées partielles sont :*

$$\begin{array}{lll} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 12x^2 - 34 & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -2 & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} = 0 \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = -2 & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 4 & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} = -2 \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} = 0 & \dfrac{\partial^2 f}{\partial z \partial y} = -2 & \dfrac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 2. \end{array}$$

*Donc la matrice hessienne est :*

$$\begin{pmatrix} 12x^2 - 34 & -2 & 0 \\ -2 & 4 & -2 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

*Pour le point* $x_1 = y_1 = z_1 = 0$, *la matrice hessienne est donnée par :*

$$\boldsymbol{H}(P_1) = \begin{pmatrix} -34 & -2 & 0 \\ -2 & 4 & -2 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \triangle_1 &= -34 \\ \triangle_2 &= -140 \\ \triangle_3 &= -144. \end{aligned}$$

*D'après le résultat général précédent, ces trois mineurs principaux ne vérifient ni la condition 1 ni la condition 2, prises au sens large, la fonction n'atteint donc ni un minimum ni un maximum au point* $P_1$.
*Calculons maintenant les valeurs propres de* $\boldsymbol{H}(P_1)$ *en résolvant l'équation* $|\boldsymbol{H}(P_1) - \lambda \boldsymbol{I}| = 0$. *On obtient les valeurs propres* $\lambda_{11} = -34.1$, $\lambda_{12} = 5.3$ *et* $\lambda_{13} = 0.8$. *Nous avons donc au moins deux valeurs propres de signes opposés,*

*donc le point $P_1$ est un point selle.*
*Pour les points $x_2 = y_2 = z_2 = -3$ et $x_3 = y_3 = z_3 = 3$, la matrice hessienne est la même :*

$$\boldsymbol{H} = \begin{pmatrix} 74 & -2 & 0 \\ -2 & 4 & -2 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

*On a :*

$$\begin{aligned} \triangle_1 &= 74 \\ \triangle_2 &= 292 \\ \triangle_3 &= 288. \end{aligned}$$

*Ainsi, pour chacun de ces deux points, la fonction présente un minimum.*

**Exemple 11.6** *Une firme aéronautique fabrique des avions qu'elle vend sur deux marchés étrangers. Soit $q_1$ le nombre d'avions vendus sur le premier marché et $q_2$ le nombre d'avions vendus sur le deuxième marché. Les fonctions de demande dans les deux marchés respectifs sont :*

$$\begin{aligned} p_1 &= 60 - 2q_1 \\ p_2 &= 80 - 4q_2 \end{aligned}$$

*où $p_1$ et $p_2$ sont les deux prix de vente. La fonction de coût total de la firme est :*

$$C = 50 + 40q$$

*où $q$ est le nombre total d'avions produits. Le but est de trouver le nombre d'avions que la firme doit vendre sur chaque marché pour maximiser son bénéfice.*
*Comme $q = q_1 + q_2$, la fonction de coût devient :*

$$\begin{aligned} C &= 50 + 40q \\ &= 50 + 40(q_1 + q_2) \\ &= 50 + 40q_1 + 40q_2. \end{aligned}$$

*Le revenu total $R$ s'obtient en faisant le produit du prix par la quantité sur chaque marché :*

$$\begin{aligned} R &= p_1q_1 + p_2q_2 \\ &= (60 - 2q_1)q_1 + (80 - 4q_2)q_2 \\ &= 60q_1 - 2q_1^2 + 80q_2 - 4q_2^2. \end{aligned}$$

*On obtient le bénéfice $B$ en calculant la différence entre le revenu et le coût :*

$$\begin{aligned} B &= R - C \\ &= 60q_1 - 2q_1^2 + 80q_2 - 4q_2^2 - (50 + 40q_1 + 40q_2) \\ &= 20q_1 - 2q_1^2 + 40q_2 - 4q_2^2 - 50. \end{aligned}$$

*Annulons les premières dérivées partielles :*

$$\begin{aligned} \frac{\partial B}{\partial q_1} &= -4q_1 + 20 = 0 \Rightarrow q_1 = 5 \\ \frac{\partial B}{\partial q_2} &= -8q_2 + 40 = 0 \Rightarrow q_2 = 5. \end{aligned}$$

*Il reste à vérifier que le point candidat $(q_1\,;q_2) = (5\,;5)$ est un maximum ; pour cela, calculons les deuxièmes dérivées partielles :*

$$\frac{\partial^2 B}{\partial q_1^2} = -4 \frac{\partial^2 B}{\partial q_2^2} = -8 \frac{\partial^2 B}{\partial q_1 \partial q_2} = 0.$$

*La matrice hessienne est donc :*

$$\boldsymbol{H} = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -8 \end{pmatrix}.$$

*Par conséquent :*

$$\begin{aligned} \triangle_1 &= -4 < 0 \\ \triangle_2 &= 32 > 0. \end{aligned}$$

*Comme $\triangle_1 < 0$ et $\triangle_2 > 0$, il s'agit d'un maximum. Le bénéfice maximum réalisé est égal à :*

$$20(5) - 2(5)^2 + 40(5) - 4(5)^2 - 50 = 100.$$

*Quant aux prix, ils valent respectivement :*

$$\begin{aligned} p_1 &= 60 - 2(5) = 50 \\ p_2 &= 80 - 4(5) = 60. \end{aligned}$$

## 11.4 Matrice hessienne bordée

La **méthode des multiplicateurs de Lagrange** utilisée pour obtenir les extrema d'une fonction soumise à des contraintes d'égalité (voir point 7.7) peut également se présenter sous forme matricielle. Ainsi, dans le cas simple où la fonction à optimiser (fonction objectif) est une fonction de deux variables $f(x, y)$ soumise à une seule contrainte de la forme $g(x, y) = 0$, nous avons le **Lagrangien** :

$$F(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda g(x, y).$$

Introduisons la **matrice hessienne bordée** :

$$\boldsymbol{H} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 F}{\partial \lambda^2} & \dfrac{\partial^2 F}{\partial \lambda \partial x} & \dfrac{\partial^2 F}{\partial \lambda \partial y} \\ \dfrac{\partial^2 F}{\partial x \partial \lambda} & \dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \\ \dfrac{\partial^2 F}{\partial y \partial \lambda} & \dfrac{\partial^2 F}{\partial y \partial x} & \dfrac{\partial^2 F}{\partial y^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \dfrac{\partial g}{\partial x} & \dfrac{\partial g}{\partial y} \\ \dfrac{\partial g}{\partial x} & \dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \\ \dfrac{\partial g}{\partial y} & \dfrac{\partial^2 F}{\partial y \partial x} & \dfrac{\partial^2 F}{\partial y^2} \end{pmatrix}$$

dont le déterminant sera noté $| \boldsymbol{H} |$.

La condition suffisante pour l'existence d'un extremum est fournie par le résultat suivant :

Soit $P(x_0; y_0; f(x_0, y_0))$ le point où $[\partial F/\partial x = \partial F/\partial y = \partial F/\partial \lambda = 0]$. Alors, si en ce point :

$$| \boldsymbol{H} | < 0 \Longrightarrow \text{minimum au point P}$$
$$| \boldsymbol{H} | > 0 \Longrightarrow \text{maximum au point P.}$$

La méthode des multiplicateurs de Lagrange peut se généraliser à l'optimisation d'une fonction de $n$ variables $f(x_1, \ldots, x_n)$ soumise à $k$ contraintes $g_j(x_1, \ldots, x_n) = 0,\ \ j = 1, \ldots, k$ où $1 \leq k \leq n$.

Dans ce cas, le Lagrangien s'écrit :

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n, \lambda_1, \ldots, \lambda_k) = f(x_1, \ldots, x_n) + \sum_{j=1}^{k} \lambda_j g_j(x_1, \ldots, x_n)$$

et l'annulation des premières dérivées partielles fournit un système de $n+k$ équations à $n+k$ inconnues :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F}{\partial x_1} &= \frac{\partial f}{\partial x_1} + \lambda_1 \frac{\partial g_1}{\partial x_1} + \lambda_2 \frac{\partial g_2}{\partial x_1} + \ldots + \lambda_k \frac{\partial g_k}{\partial x_1} = 0\\
\frac{\partial F}{\partial x_2} &= \frac{\partial f}{\partial x_2} + \lambda_1 \frac{\partial g_1}{\partial x_2} + \lambda_2 \frac{\partial g_2}{\partial x_2} + \ldots + \lambda_k \frac{\partial g_k}{\partial x_2} = 0\\
&\vdots\\
\frac{\partial F}{\partial x_n} &= \frac{\partial f}{\partial x_n} + \lambda_1 \frac{\partial g_1}{\partial x_n} + \lambda_2 \frac{\partial g_2}{\partial x_n} + \ldots + \lambda_k \frac{\partial g_k}{\partial x_n} = 0\\
\frac{\partial F}{\partial \lambda_1} &= g_1(x_1, \ldots, x_n) = 0\\
&\vdots\\
\frac{\partial F}{\partial \lambda_k} &= g_k(x_1, \ldots, x_n) = 0.
\end{aligned}$$

Les conditions du deuxième ordre pour déterminer s'il s'agit d'un maximum ou d'un minimum reposent sur le calcul des mineurs de la matrice hessienne bordée suivante :

$$\boldsymbol{H} = \left(\begin{array}{ccc|ccc}
0 & \ldots & 0 & \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \ldots & \frac{\partial g_1}{\partial x_n}\\
0 & \ldots & 0 & \frac{\partial g_2}{\partial x_1} & \ldots & \frac{\partial g_2}{\partial x_n}\\
\vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\
0 & \ldots & 0 & \frac{\partial g_k}{\partial x_1} & \ldots & \frac{\partial g_k}{\partial x_n}\\
\hline
\frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \ldots & \frac{\partial g_k}{\partial x_1} & \frac{\partial^2 F}{\partial x_1^2} & \ldots & \frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_n}\\
\frac{\partial g_1}{\partial x_2} & \ldots & \frac{\partial g_k}{\partial x_2} & \frac{\partial^2 F}{\partial x_2 \partial x_1} & \ldots & \frac{\partial^2 F}{\partial x_2 \partial x_n}\\
\vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots\\
\frac{\partial g_1}{\partial x_n} & \ldots & \frac{\partial g_k}{\partial x_n} & \frac{\partial^2 F}{\partial x_n \partial x_1} & \ldots & \frac{\partial^2 F}{\partial x_n^2}
\end{array}\right).$$

Notons le mineur principal qui contient $\frac{\partial^2 F}{\partial x_1^2}$ comme dernier élément de la diagonale principale par $|\boldsymbol{H}_1|$. $|\boldsymbol{H}_2|$ correspond au mineur principal qui

contient $\dfrac{\partial^2 F}{\partial x_2^2}$ comme dernier élément de la diagonale principale et ainsi de suite. La condition suffisante pour l'existence d'un minimum ou d'un maximum dépend des signes des mineurs principaux $|\boldsymbol{H}_{k+1}|, |\boldsymbol{H}_{k+2}|, \ldots, |\boldsymbol{H}_n| = |\boldsymbol{H}|$.

Mentionnons qu'il y a au moins une contrainte ($k \geq 1$) et donc $|\ \boldsymbol{H}_1\ |$ n'intervient jamais dans les calculs. La condition suffisante pour l'existence d'un extremum est donnée dans le résultat suivant :

La fonction $f(x_1, \ldots, x_n)$ soumise aux $k$ contraintes

$$g_j(x_1, \ldots, x_n) = 0, \quad j = 1, \ldots, k$$

admet :

- un maximum au point candidat, si les mineurs principaux $|\ \boldsymbol{H}_{k+1}\ |$, $|\ \boldsymbol{H}_{k+2}\ |, \ldots, |\ \boldsymbol{H}_n\ |$ sont de signe alterné, le signe de $|\ \boldsymbol{H}_{k+1}\ |$ étant celui de $(-1)^{k+1}$,
- un minimum, si les mineurs principaux $|\ \boldsymbol{H}_{k+1}\ |, |\ \boldsymbol{H}_{k+2}\ |, \ldots, |\ \boldsymbol{H}_n\ |$ sont de même signe, celui de $(-1)^k$.

**Exemple 11.7** *Trouver les extrema de la fonction objectif :*

$$f(x, y) = 5x^2 + 6y^2 - xy$$

*sous la contrainte :*

$$x + 2y = 24.$$

*La contrainte s'écrit* $g(x, y) = x + 2y - 24 = 0$. *Le Lagrangien est donné par :*

$$F(x, y, \lambda) = 5x^2 + 6y^2 - xy + \lambda(x + 2y - 24).$$

*L'annulation des premières dérivées partielles fournit un système de trois équations à trois inconnues qu'il s'agit de résoudre :*

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 10x - y + \lambda = 0 \tag{11.6}$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = 12y - x + 2\lambda = 0 \tag{11.7}$$

$$\frac{\partial F}{\partial \lambda} = x + 2y - 24 = 0. \tag{11.8}$$

*En éliminant* $\lambda$ *des équations (11.6) et (11.7), on obtient* $2y = 3x$ *que l'on substitue dans (11.8) :*

$$x + 3x - 24 = 0$$
$$4x = 24$$

*on obtient* $x_0 = 6$. *Comme* $x + 2y = 24$, *on trouve* $y_0 = 9$.
*Pour déterminer si le point candidat* $x_0 = 6$ *et* $y_0 = 9$ *est un extremum, il faut calculer les dérivées partielles du deuxième ordre :*

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = 10, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = 12, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x} = -1.$$

*Les dérivées partielles de la contrainte* $g(x, y) = x + 2y - 24$ *sont :*

$$\frac{\partial g}{\partial x} = 1 \text{ et } \frac{\partial g}{\partial y} = 2.$$

*La matrice hessienne bordée est donc :*

$$\boldsymbol{H} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 10 & -1 \\ 2 & -1 & 12 \end{pmatrix}.$$

*Puisqu'il s'agit d'une fonction de deux variables soumise à une contrainte, on utilise le déterminant de la matrice* $\boldsymbol{H}$. *Comme* $\mid \boldsymbol{H} \mid = -56 < 0$, *la fonction objectif sous la contrainte* $x + 2y = 24$ *possède un minimum en* $x_0 = 6$ *et* $y_0 = 9$.
*Nous avons donc trouvé la solution qui minimise la fonction objectif tout en respectant la contrainte. Remarquons que cette même fonction, si elle n'est pas soumise à la contrainte* $x + 2y = 24$, *ne possède pas un minimum au même point ! Le lecteur peut vérifier que sans la contrainte, cette fonction possède un minimum en* $x_0 = y_0 = 0$.

**Exemple 11.8** *Une entreprise fabrique trois types de machines* $x_1, x_2$ *et* $x_3$. *La fonction de coût conjointe* $C(x_1, x_2, x_3)$ *est :*

$$C(x_1, x_2, x_3) = 4x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2 - 2x_1x_2 + x_2x_3 - 30x_2 - 30x_3$$

*Combien de machines de chaque type l'entreprise doit-elle fabriquer pour minimiser son coût s'il lui faut un total de 100 machines ?*
*Il s'agit ici de minimiser la fonction de coût conjointe sous la contrainte :*

$$x_1 + x_2 + x_3 = 100.$$

*Ainsi,* $g(x_1, x_2, x_3) = x_1 + x_2 + x_3 - 100$. *La fonction de Lagrange* $F(x_1, x_2, x_3, \lambda)$ *est donnée par :*

$$\begin{aligned} F(x_1, x_2, x_3, \lambda) &= C(x_1, x_2, x_3) + \lambda g(x_1, x_2, x_3) \\ &= 4x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2 - 2x_1x_2 + x_2x_3 - 30x_2 - 30x_3 \\ &\quad +\lambda(x_1 + x_2 + x_3 - 100). \end{aligned}$$

*Annulons les premières dérivées partielles :*

$$\frac{\partial F}{\partial x_1} = 8x_1 - 2x_2 + \lambda = 0 \tag{11.9}$$

$$\frac{\partial F}{\partial x_2} = 4x_2 - 2x_1 + x_3 - 30 + \lambda = 0 \tag{11.10}$$

$$\frac{\partial F}{\partial x_3} = 2x_3 + x_2 - 30 + \lambda = 0 \tag{11.11}$$

$$\frac{\partial F}{\partial \lambda} = x_1 + x_2 + x_3 - 100 = 0. \tag{11.12}$$

*Tirons* $\lambda$ *de la première équation :* $\lambda = 2x_2 - 8x_1$. *En substituant* $\lambda$ *dans les équations (11.10) et (11.11), on obtient avec l'équation (11.12) un système de trois équations à trois inconnues :*

$$-10x_1 + 6x_2 + x_3 = 30 \tag{11.13}$$

$$-8x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 30 \tag{11.14}$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = 100. \tag{11.15}$$

*De (11.15), on tire* $x_1 = 100 - x_2 - x_3$ *que l'on remplace dans (11.13) et (11.14) pour obtenir :*

$$16x_2 + 11x_3 = 1030 \tag{11.16}$$

$$11x_2 + 10x_3 = 830. \tag{11.17}$$

*De (11.17), on tire* $x_3 = \dfrac{830 - 11x_2}{10}$ *que l'on substitue dans (11.16) :*

$$\begin{aligned} 16x_2 + \frac{11}{10}(830 - 11x_2) &= 1030 \\ 160x_2 - 121x_2 &= 1170 \\ 39x_2 &= 1170 \\ x_2 &= 30. \end{aligned}$$

*De (11.17), on a :*

$$\begin{aligned} 330 + 10x_3 &= 830 \\ 10x_3 &= 500 \\ x_3 &= 50. \end{aligned}$$

*Finalement, de (11.15)* $x_1 = 100 - 30 - 50 = 20$. *Ainsi, le point candidat est* $x_1 = 20, x_2 = 30$ *et* $x_3 = 50$. *Vérifions à présent qu'il s'agisse bien d'un minimum. Pour cela, calculons :*

$$\frac{\partial g}{\partial x_1} = 1 \ , \quad \frac{\partial g}{\partial x_2} = 1 \ , \quad \frac{\partial g}{\partial x_3} = 1$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x_1^2} = 8 \ , \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x_2^2} = 4 \ , \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x_3^2} = 2$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_2} = -2 \ , \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_3} = 0 \ , \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x_2 \partial x_3} = 1$$

*La matrice hessienne bordée est, par conséquent, donnée par :*

$$\boldsymbol{H} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 8 & -2 & 0 \\ 1 & -2 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

*On a :*

$$\mid \boldsymbol{H}_2 \mid = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 8 & -2 \\ 1 & -2 & 4 \end{vmatrix} = -16 \ \textit{et} \ \mid \boldsymbol{H}_3 \mid = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 8 & -2 & 0 \\ 1 & -2 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -39.$$

*Comme dans cet exemple il n'y a qu'une contrainte,* $(k = 1)$, *on a donc :*

$$\begin{aligned} \mid \boldsymbol{H}_{k+1} \mid &= \mid \boldsymbol{H}_2 \mid = -16 \\ \mid \boldsymbol{H}_{k+2} \mid &= \mid \boldsymbol{H}_n \mid = \mid \boldsymbol{H}_3 \mid = -39 \\ (-1)^k &= (-1)^1 = -1. \end{aligned}$$

*Selon le critère présenté à la page 308, les mineurs* $\mid \boldsymbol{H}_2 \mid$ *et* $\mid \boldsymbol{H}_3 \mid$ *étant du même signe que* $(-1)^k$, *le point* $x_1 = 20$, $x_2 = 30$ *et* $x_3 = 50$ *est un minimum.*

**Remarque** La méthode des multiplicateurs de Lagrange ne peut pas être utilisée dans tous les cas. En particulier, lorsque le problème d'optimisation a des contraintes de non-négativité ou lorsque la fonction n'est pas dérivable, cette méthode n'est pas adaptée. Or, ces contraintes sont très importantes en économie. Par conséquent, il faut utiliser des méthodes qui fournissent des solutions lorsque les contraintes se présentent sous forme d'égalité ou d'inégalité. Cependant, ces notions dépassent quelque peu le cadre de cet ouvrage, c'est pourquoi nous ne les aborderons pas.

**Exemple 11.9** *Régression linéaire simple*
*Soit le modèle linéaire suivant sous forme matricielle suivant :*

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{X\beta} + \boldsymbol{\varepsilon} \tag{11.18}$$

*où* $\boldsymbol{y}$ *est le vecteur des observations de dimension* $n \times 1$*,* $\boldsymbol{X}$ *est une matrice* $n \times 2$ *des coefficients,* $\boldsymbol{\beta}$ *est un vecteur de paramètres à estimer de dimension* $2 \times 1$ *et* $\boldsymbol{\varepsilon}$ *est un vecteur d'erreurs de dimension* $n \times 1$*.*
*Le but est d'estimer le vecteur* $\boldsymbol{\beta} = \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \end{bmatrix}$ *qui "approche le mieux" la dépendance des* $y$ *sur les* $x$*, c'est-à-dire qui minimise le terme d'erreur* $\boldsymbol{\varepsilon}$*.*
*La méthode la plus utilisée (dite des moindres carrés) minimise en fait* $\sum_i \varepsilon_i^2 = \boldsymbol{\varepsilon}'\boldsymbol{\varepsilon}$*. Sous la forme matricielle, la méthode des moindres carrés revient à minimiser, car :*
*Du modèle linéaire, nous sortons* $\boldsymbol{\varepsilon}$ *:*

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{y} - \boldsymbol{X\beta}.$$

*Par conséquent :*

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\varepsilon}'\boldsymbol{\varepsilon} &= (\boldsymbol{y} - \boldsymbol{X\beta})'(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{X\beta}) \\ &= \boldsymbol{y}'\boldsymbol{y} - \boldsymbol{\beta}'\boldsymbol{X}'\boldsymbol{y} - \boldsymbol{y}'\boldsymbol{X\beta} + \boldsymbol{\beta}'\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X\beta} \\ &= \boldsymbol{y}'\boldsymbol{y} - 2\boldsymbol{\beta}'\boldsymbol{X}'\boldsymbol{y} + \boldsymbol{\beta}'\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X\beta}. \end{aligned}$$

*(La dernière équation provient du fait que* $\boldsymbol{\beta}'\boldsymbol{X}'\boldsymbol{y}$ *est un scalaire et que sa transposée* $\boldsymbol{y}'\boldsymbol{X\beta}$ *a la même valeur).*
*Pour minimiser* $\boldsymbol{\varepsilon}'\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{y}'\boldsymbol{y} - 2\boldsymbol{\beta}'\boldsymbol{X}'\boldsymbol{y} + \boldsymbol{\beta}'\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X\beta}$*, il faut dériver par rapport à* $\boldsymbol{\beta}$ *et poser la dérivée égale à zéro :*

$$\begin{aligned} \frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}'\boldsymbol{\varepsilon}}{\partial \boldsymbol{\beta}} &= \frac{\partial(\boldsymbol{y}'\boldsymbol{y} - 2\boldsymbol{\beta}'\boldsymbol{X}'\boldsymbol{y} + \boldsymbol{\beta}'\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X\beta})}{\partial \boldsymbol{\beta}} \\ &= -2\boldsymbol{X}'\boldsymbol{y} + 2\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X\beta}. \end{aligned}$$

*De là, nous trouvons l'estimateur des moindres carrés* $\boldsymbol{b}$ *de* $\boldsymbol{\beta}$ *en posant :*

$$2\left(-\boldsymbol{X}'\boldsymbol{y}+\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X}\boldsymbol{b}\right)=0$$

*ou encore (en substituant* $\boldsymbol{\beta}$ *par* $\boldsymbol{b}$ *lorsqu'on pose l'équation égale à zéro)*

$$\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X}\boldsymbol{b}=\boldsymbol{X}'\boldsymbol{y}$$

*qu'on appelle l'équation normale.*
*Pour obtenir* $\boldsymbol{b}$*, on multiplie les deux côtés de cette équation par* $(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}$*, c'est-à-dire :*

$$\boldsymbol{b}=(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}'\boldsymbol{y}.$$

**Note** *Il peut arriver que la matrice* $(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})$ *n'ait pas d'inverse. Dans ce cas, on utilise ce qu'on appelle l'inverse généralisé (g-inverse), notée* $(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-}$*. Cet inverse doit satisfaire parmi d'autres, la condition suivante :*

$$(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-}(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})=(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X}).$$

# Exercices

1. Une fabrique utilise deux facteurs de production $x$ et $y$ pour produire un certain nombre d'unités d'un bien $z$.
   Le prix d'une unité du facteur $x$ est 3 francs et celui d'une unité du facteur $y$ est 2 francs. La fonction de coût de production est donc :

$$c = 3x + 2y$$

   Si cette fabrique doit produire 300 unités du bien $z$ et que la fonction de production est donnée par $z = 15\sqrt[4]{2}x^{3/4}y^{1/4}$ (contrainte), combien devra-t-elle acheter d'unités de $x$ et $y$ pour minimiser le coût de production ?

2. Un investisseur décide d'acheter trois types d'actions pour un montant total de 400 francs. Soit $X_1, X_2, X_3$ le montant consacré à chaque type d'action, ainsi $X_1 + X_2 + X_3 = 400$. Le taux de rendement pour chaque action est une variable aléatoire dont l'espérance mathématique et la variance sont données par le tableau suivant :

| type d'action | rendement moyen | variance |
|---|---|---|
| 1 | 0.20 | 1/5 |
| 2 | 0.15 | 1/10 |
| 3 | 0.10 | 1/25 |

   On appelle rendement moyen espéré du placement l'expression :

$$\overline{R} = 0.20X_1 + 0.15X_2 + 0.10X_3.$$

   On appelle risque du placement l'expression suivante (c'est-à-dire la variance) :

$$V = \frac{1}{5}X_1^2 + \frac{1}{10}X_2^2 + \frac{1}{25}X_3^2$$

   (a) Trouver $X_1, X_2$ et $X_3$ qui minimisent le risque. À quel rendement moyen espéré correspond cette répartition des achats ?

   (b) Trouver $X_1, X_2, X_3$ qui minimisent le risque sous la contrainte additionnelle que le rendement moyen espéré $\overline{R} = 60$. Par rapport à la situation sous a), le risque est-il plus grand ou plus faible ?

3. Une firme produit un certain bien qu'elle vend sur le marché au prix unitaire de 8 francs. La quantité produite (et vendue) est donnée par :

$$Q = 8K^{3/8}L^{1/8}$$

où $K$ représente les unités de facteur capital employées et $L$ les unités de facteur travail employées. Le revenu de la firme s'élève donc à $8Q = 64K^{3/8}L^{1/8}$. Le coût de production de cette firme est donné par $C = 12K + 4L$.

   (a) Trouver les quantités de $K$ et $L$ que la firme doit employer afin de maximiser le bénéfice.

   (b) La firme constate que la politique de maximisation du bénéfice ne lui assure pas une part de marché suffisante. Elle décide en conséquence d'adopter la politique de maximisation de la quantité vendue sous réserve d'un bénéfice minimal égal à 48 francs.

      i. Formuler explicitement le problème de maximisation sous contrainte.

      ii. Montrer que dans la solution optimale la combinaison optimale des facteurs (c'est-à-dire leurs proportions) reste la même que dans le problème de maximisation du bénéfice.

      iii. Donner la solution complète pour $K, L$ et $Q$.

4. La fonction de production d'une firme est donnée par :

$$Q = 4K^{1/4}L^{3/4}$$

où $K$ et $L$ sont les deux facteurs de production et $Q$ la quantité produite. La firme achète les deux facteurs sur le marché, le prix unitaire de $L$ est de 3 francs et, en raison d'une pénurie, le prix unitaire de $K$ est une fonction croissante de $K$ suivant la formule :

$$p_k = 2 + 0.1K.$$

Sachant que la somme consacrée à l'achat des deux facteurs de production est 150 francs, trouver les valeurs de $K$ et $L$ qui maximisent la production. Quel est le prix unitaire de $K$ ?

5. Maximiser $z = -x \ln x - y \ln y$ sous la contrainte $x + y = 1$.

6. Une firme monopolistique produit un certain bien. Le coût total de production de la firme est représenté par la fonction :

$$C = 2I^2 + 5q^2 - 20q + 400$$

où $q$ représente les unités produites et $I$ représente un indice de qualité du produit (par exemple le degré de raffinage du produit).
Le prix que la firme peut commander sur le marché est fonction de l'indice de qualité :

$$p = 100 - 3q + 4I.$$

Calculer la recette totale de la firme.

   (a) Trouver $q$ et $I$ qui maximisent le bénéfice de la firme.

   (b) Vérifier les conditions de deuxième ordre.

7. Vous partez en vol charter pour un voyage aux États-Unis. Dans votre valise, vous êtes autorisé à emporter 24 kg. Vos affaires de toilette pèsent 4 kg et vous voulez utiliser les 20 kg qui restent de façon optimale. Vous aimeriez emporter trois sortes de biens : blue-jeans notés $X$, T-shirts notés $Y$ et pullovers notés $Z$. Les poids unitaires respectifs sont (en kg) :

$$p_X = 2 \qquad p_Y = 0.5 \qquad p_Z = 1.$$

L'utilité que ces vêtements vous procurent pendant votre voyage est mesurée par la fonction :

$$U = X^2YZ.$$

   (a) Choisissez $X, Y$ et $Z$ de façon à maximiser l'utilité.

   (b) Ayant choisi votre assortiment optimal, vous vous rendez compte que vous ne pouvez pas fermer la valise. Le volume total disponible dans la valise (après y avoir rangé les affaires de toilette) est de 40 $\text{dm}^3$. Le volume unitaire respectif des trois vêtements (en $\text{dm}^3$) est :

$$V_X = 4 \qquad V_Y = 2/3 \qquad V_Z = 3.$$

   Trouver la combinaison optimale sous la double contrainte du poids et du volume. Vérifier alors la condition de $2^e$ ordre.

8. Trouver l'extremum de :

$$f(x, y, z) = x^2 - 2xy + y^2 + 5z^2$$

sous la contrainte :

$$x + y + 2z = 10.$$

9. Une entreprise a la fonction de production suivante :

$$Q = 8K^{1/2}L^{1/4}$$

où $Q$ est la production, $K$ est le capital, $L$ le travail. Le prix du capital est $p_K = 4$, le taux de salaire $p_L = 2$ et l'entreprise désire produire $Q = 64$. Trouver la combinaison des facteurs $K$ et $L$ donnant au moindre coût la production requise.

10. Déterminer les extrema de la fonction $f(x, y) = \ln \mid x \mid + \ln \mid y \mid$, $x$ et $y$ étant liés par la contrainte $x^2 + y^2 = 9$ .

11. Une entreprise fabrique deux types de machines $x$ et $y$. La fonction de coût conjointe est donnée par :

$$f(x, y) = x^2 + y^2 - 10x - 12y + 51.$$

Trouver le nombre de machines de chaque type que l'entreprise doit fabriquer pour minimiser son coût.
À l'aide des conditions du second ordre, montrer qu'il s'agit bien d'un minimum.

12. Un consommateur dépense 24 francs pour l'achat de deux biens, $x$ et $y$. Les prix de $x$ et de $y$ sont respectivement 1 francs et 2 francs. La fonction d'utilité du consommateur est donnée par $U = 5x^2 + 6y^2 - xy$. Combien d'unités de chaque bien doit-il consommer pour maximiser son utilité ?



## HESSE Ludwig Otto (1811-1874)

Mathématicien allemand né à Königsberg en 1811, Hesse est l'étudiant de Jacobi à l'université de sa ville natale où il obtient son doctorat en 1840. Il enseigne alors la chimie et la physique dans cet établissement jusqu'en 1856, année où il est nommé à l'université de Heidelberg. Il y restera douze ans avant d'obtenir un poste à Munich, où il décédera en 1874.

Du point de vue scientifique, on lui doit notamment le développement de la théorie des fonctions algébriques ainsi que de celle des invariants. Il introduit le déterminant hessien tiré de la matrice hessienne dans un article paru en 1942 traitant des courbes cubiques et quadratiques.

# Partie III

# Mathematica

# Chapitre 12

# Introduction à Mathematica

## 12.1 Introduction

De nos jours, les innombrables calculs mathématiques peuvent s'avérer fastidieux et compliqués, voire impossibles à résoudre avec une machine conventionnelle du fait du temps considérable que nécessite leur traitement. C'est pourquoi des logiciels puissants et de plus en plus faciles à utiliser nous permettent de gagner du temps et nous rendent la tâche moins ardue. Un **logiciel** est un ensemble de programmes, procédés et règles, et éventuellement de la documentation, relatifs au fonctionnement d'un ensemble de traitements de l'information.

Sur le marché actuel, il existe une multitude de logiciels mathématiques plus ou moins conviviaux, à utilité variable. On trouve par exemple Scientific Workplace, qui sert de traitement de texte et de calculatrice graphique et analytique à la fois. On peut donc écrire un texte, y insérer des graphes et résoudre des équations avec un seul et même logiciel. On trouve également Mathematica, avec lequel on peut programmer, résoudre des équations, traiter des données et faire des représentations graphiques. Le choix d'un logiciel est non seulement déterminé par la fonction qu'il doit remplir, mais aussi par sa facilité d'utilisation. Certains d'entre eux ont recourt plutôt à la souris et d'autres au clavier, certains sont faciles à utiliser alors que d'autres ont besoin de longues lignes de **commandes** pour fonctionner, certains éxecutent plus rapidement les commandes graphiques que les commandes numériques,

le choix dépend bien évidemment des besoins de l'utilisateur. Une commande est un signal reçu et décodé par un système et qui déclenche de la part de celui-ci la réalisation d'une fonction déterminée.

Dans le cadre de ce chapitre, nous allons traiter un logiciel facile à utiliser et souvent employé dans le domaine scientifique : Mathematica. Nous allons nous efforcer de parcourir les bases de ce logiciel qui permettent déjà de faire les opérations les plus fréquemment utilisées en mathématiques. Une petite bibliographie contenant des ouvrages spécifiques se trouve à la fin de ce chapitre.

## 12.2 Le logiciel

Mathematica est un système de logiciels utilisé pour des applications mathématiques **graphiques, analytiques** et **numériques**. Ce sont les trois manières différentes d'approcher un problème mathématique. Il existe des versions de Mathematica pour beaucoup de configurations informatiques : Microsoft Windows, Apple Macintosh, OS/2, MS-DOS, Sun, DEC Alpha, DEC OpenVAX/VMS, IBM RISC System/6000, pour n'en citer que quelques-unes. Mathematica pour Windows (3.1, NT ou 95) nécessite un PC (Personal Computer) avec un microprocesseur 386 ou supérieur avec 4 Mb voire 6 Mb (un mégabyte correspond à un million de caractères) de mémoire vive (RAM), et l'espace requis sur le disque dur est de 13 Mb. La version de Mathematica pour Macintosh ou Power Mac (System 7 ou supérieur) nécessite au moins un microprocesseur 68020, 6 Mb voire 10 Mb de mémoire vive et 7 Mb d'espace libre sur le disque dur. Il existe également une version de Mathematica pour étudiants.

Mathematica peut être utilisé comme :

- un **système de visualisation de fonctions** par des graphes en deux ou en trois dimensions ;
- une **calculatrice analytique ou numérique** pour résoudre une équation, une intégrale ou un simple calcul numérique ;
- un **langage de programmation** (c'est-à-dire un ensemble de caractères, de symboles et de règles permettant de communiquer avec un ordinateur en vue de lui faire exécuter un certain nombre d'instructions) ;

- un **environnement software** (c'est-à-dire un cadre comportant des outils, des facilités, avec une certaine puissance de calcul) pour l'analyse de données. Remarquons que l'environnement pris dans son sens informatique plus général englobe toutes les notions de hardware (matériel), software (logiciel) et réseau qui entourent l'utilisateur.

Nous allons traiter uniquement les deux premiers points de cette liste non exhaustive.

L'utilisation de Mathematica se fait par l'intermédiaire d'une ou de plusieurs lignes de commande. Pratiquement, on procède de la façon suivante :

1. Écrire la(ou les) ligne(s) de commande correspondant à l'activité voulue ;
2. Sélectionner celles que l'on veut exécuter ;
3. Exécuter la commande sélectionnée en pressant **Shift** et **Return** (ou bien avec la souris en cliquant sur **Evaluate Selection** dans le menu **Action**). La touche **Insert** exécute la commande sans sélection préalable. Signalons que le respect de la syntaxe est très important, de même que la différenciation des majuscules et des minuscules.

L'affichage à l'écran est très clair et convivial puisque le logiciel place *In[1]:* = pour montrer qu'il s'agit d'une commande (en l'occurence la première) que l'on a insérée, et *Out[1]:* = pour débuter le résultat de ladite commande.

## 12.3 Visualisation de fonctions

Au chapitre 2, nous avons vu comment représenter graphiquement une fonction. Avec Mathematica, pour visualiser une fonction en deux dimensions, on utilise la commande **Plot**. Une fonction $f(x)$ est représentée graphiquement de la façon suivante :

```
Plot[f(x), {x, borne inférieure, borne supérieure}]
```

**Exemple 12.1** La représentation de $f(x) = \sin(x)$, *avec* $0 \leq x \leq 2\pi$ (Figure 12.1) est réalisée au moyen de la commande *:*

```
Plot[Sin[x], {x, 0, 2Pi}].
```

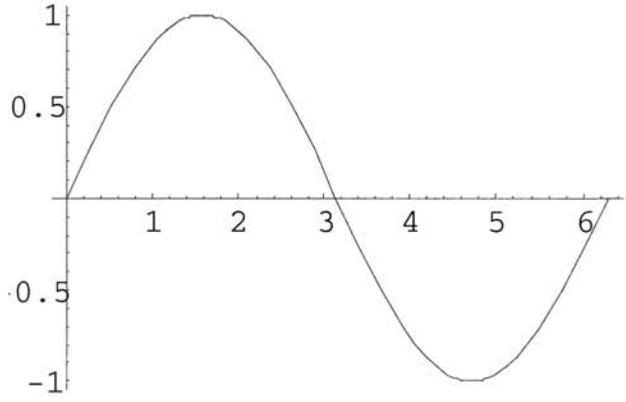



Figure 12.1: Représentation de la fonction $\sin(x)$

On peut visualiser plusieurs fonctions sur le même graphe par la même commande en les écrivant les unes après les autres, séparées par une virgule.

**Exemple 12.2** La représentation des fonctions $sin(x)$, $x^2$ et $\frac{1}{x}$ sur le même graphe avec $-2\pi \leq x \leq 2\pi$ (Figure 12.2) se fait à l'aide de la commande :

`Plot[{Sin[x], x^2, 1/x}, {x, -2Pi, 2Pi}].`

Lorsqu'on utilise la commande **Plot** telle qu'on l'a vue dans les deux exemples précédents, Mathematica doit choisir certains paramètres comme l'échelle des axes, le nombre de points qu'il faut évaluer pour le graphe, etc. Le logiciel fait automatiquement des choix **par défaut** mais l'utilisateur est libre de visualiser le graphe comme il le veut grâce aux options que l'on peut insérer dans les commandes. La syntaxe à utiliser est la suivante :

```
Plot[f(x), {x, borne inférieure, borne supérieure},
option->valeur de l'option]
```

**Exemple 12.3** Le graphe de $sin(x^2)$, pour $0 \leq x \leq 3$, avec les noms donnés aux axes x et y (Figure 12.3) est réalisé avec la commande :

`Plot[Sin[x^2], {x, 0, 3}, AxesLabel-> {"x", "sin(x^2)"}].`

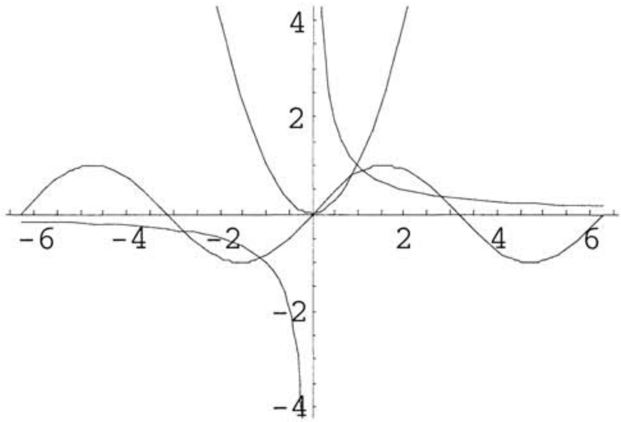



Figure 12.2: Représentation simultanée des fonctions $\sin(x), x^2$ et $\dfrac{1}{x}$

La représentation graphique de fonctions de plusieurs variables en trois dimensions se fait à l'aide de la commande **Plot3D**. Une fonction $f(x,y)$ est représentée de la manière suivante :

`Plot3D[f(x,y), {x, borne inférieure, borne supérieure}, {y, borne inférieure, borne supérieure}]`

**Exemple 12.4** La fonction $x^2 + y^2$ avec $-1 \leq x \leq 1$ et $-2 \leq y \leq 3$ (Figure 12.4) est obtenue au moyen de la commande *:*

```
Plot3D[x^2 + y^2, {x, -1, 1}, {y, -2, 3}].
```

**Exemple 12.5** La fonction $\mid 6 - x \mid + \mid 5 - x \mid + \mid 1 - y \mid + \mid 7 - y \mid$, avec $0 \leq x \leq 8$ et $0 \leq y \leq 8$, (Figure 12.5) est dessinée à l'aide de la commande *:*

```
Plot3D[Abs[6 - x] + Abs[5 - x] + Abs[1 - y] + Abs[7 - y], {x, 0, 8}, {y, 0, 8}].
```

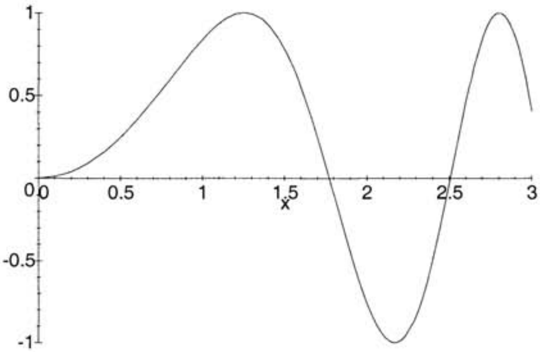



Figure 12.3: Représentation de $\sin(x^2)$ avec noms des axes

## 12.4 Calculatrice numérique

Mathematica peut être utilisé comme une calculatrice scientifique ; pour cela, il suffit d'entrer l'opération que l'on veut effectuer et d'exécuter la commande. Voici une liste de quelques fonctions couramment utilisées :

| Fonction utilisée | Fonction écrite pour Mathematica |
|---|---|
| addition, soustraction | `+ -` |
| multiplication, division | `* /` |
| puissance | `^` |
| $\sqrt{x}$ | `Sqrt[x]` |
| $e^x$ | `Exp[x]` |
| $\ln(x)$ | `Log[x]` |
| $\log_b(x)$ | `Log[b, x]` |
| $\sin(x), \cos(x), \tan(x)$ | `Sin[x], Cos[x], Tan[x]` |
| $\arcsin(x), \arccos(x), \arctan(x)$ | `ArcSin[x], ArcCos[x], ArcTan[x]` |
| valeur absolue de x | `Abs[x]` |

Mathematica affiche généralement la valeur exacte d'un résultat numérique. On peut déterminer le nombre de décimales voulues par la commande **N** :

**Exemple 12.6** Les 40 premières décimales de $\pi$ s'obtiennent de la manière suivante :

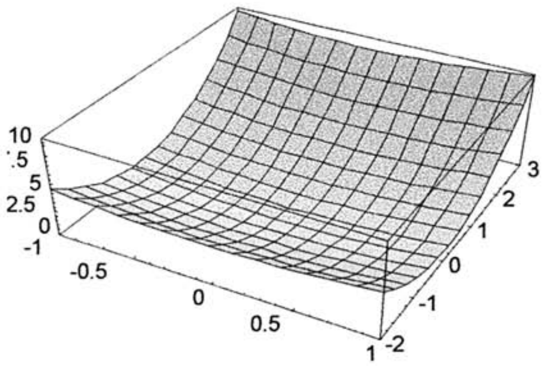



Figure 12.4: Représentation de $x^2 + y^2$

*In[1]:* $=$`N[Pi, 40]`
*Out[1]:* $=$*3.141592653589793238462643383279502884197 2.*

## 12.5 Calculatrice analytique

Pour faire du calcul différentiel, on utilise la commande **D**, qui permet de dériver la fonction souhaitée. L'expression générale de cette commande pour calculer la dérivée d'une fonction $f(x)$ par rapport à $x$ (c'est à dire $\dfrac{df(x)}{dx}$) est :

`D[f[x], x].`

Il en est de même pour calculer la seconde dérivée $f"(x)$ :

`D[f[x], x, x].`

Pour la dérivation des fonctions de plusieurs variables, il suffit d'indiquer la fonction et les variables par rapport auxquelles on veut la dériver.

**Exemple 12.7** La première dérivée partielle de la fonction $\cos(x)\sin(y)$ par rapport à la variable $x$ se calcule au moyen de la commande :
*In[2]:* $=$`D[Cos[x] * Sin[y], x].`
*Out[2]:* $=-$(*Sin*[x] *Sin*[y]).
*La deuxième dérivée partielle par rapport à $x$ s'obtient de la même façon par*

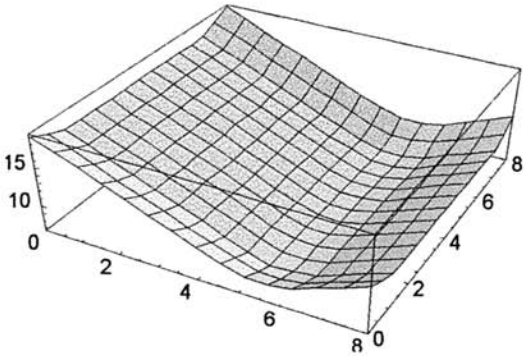



Figure 12.5: Représentation de $| 6-x | + | 5-x | + | 1-y | + | 7-y |$

*la commande:*
*In[3]:* =`D[Cos[x] * Sin[y], x, x]`
*Out[3]:* =*-(Cos[x] Sin[y]).*

Pour intégrer une fonction, on a recourt à la commande **Integrate**, qui utilise la syntaxe suivante:

`Integrate[f[x], {x, borne inférieure, borne supérieure}].`

**Exemple 12.8** Le calcul de l'intégrale de la fonction $\cos^2 x$ par rapport à la variable $x$ s'obtient par la commande:
*In[4]:* =`Integrate[Cos[x]^2, x]`
*Out[4]:* $=\frac{2x+Sin[2x]}{4}$.

Si l'on veut trouver le résultat numérique d'une intégrale définie, il suffit de préciser les bornes d'intégration (voir exemple 12.12, point 4).

On peut aussi résoudre des équations grâce à la commande **Solve**. La commande à utiliser pour résoudre une équation du type $f(x) = 0$ est la suivante:

`Solve[f(x) == 0, x].`

**Exemple 12.9** La solution de l'équation du deuxième degré $x^2 + 2x - 7 = 0$ est trouvée par la commande:
*In[5]:* =*Solve[x^2+2*x-7==0, x]*
*Out[5]:* $=\{\{x\text{->}\frac{-2-4Sqrt[2]}{2}\},\{x\text{->}\frac{-2+4Sqrt[2]}{2}\}\}$.

Pour obtenir des réponses numériques, la commande **NSolve** s'utilise de la même manière que la commande Solve.

La commande Solve permet également de résoudre un système d'équations. Pour cela, il suffit d'aligner les $n$ équations $f_1(x_1, x_2, ..., x_n) = 0$, $f_2(x_1, x_2, ..., x_n) = 0$, ... , $f_n(x_1, x_2, ..., x_n) = 0$ dans la commande.

```
Solve[{f1(x1, x2, ..., xn) == 0, f2(x1, x2, ..., xn) == 0, ... ,
        fn(x1, x2, ..., xn) == 0}, {x1, x2, ..., xn}]
```

**Exemple 12.10** *Le système d'équations :*

$$ax + y = 0$$
$$2x + (1 - a)y - 1 = 0$$

*peut être résolu par rapport aux variables $x$ et $y$ par la commande :*
*In[6]: =Solve[{*a * x + y == 0, 2 * x + (1 − a) * y − 1 == 0*}, {*x, y*}]*
*Out[6]:* $=\{\{x\text{->}-(\frac{1}{-2+(1-a)a}), y\text{->}\frac{a}{-2+(1-a)a}\}\}$.

Mathematica est évidemment tout à fait adapté pour le calcul matriciel. Pour pouvoir travailler plus simplement, on attribue une matrice ou un vecteur à une variable.

Ainsi, pour attribuer la matrice $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$ à une variable $\boldsymbol{M}$, on écrit :

M = {{a11, a12, ..., a1n}, {a21, a22, ..., a2n}, ..., {am1, am2, ..., amn}}

De même, avec un vecteur $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ \vdots \end{pmatrix}$ pour l'attribuer à la variable $\boldsymbol{v}$ :

v = {a, b, c, ...}

De cette manière, le calcul matriciel s'en trouve considérablement facilité. Les commandes les plus utiles sont résumées dans le tableau suivant :

| Commande | Utilité |
|---|---|
| . | multiplication matricielle ou vectorielle |
| Det[M] | déterminant de la matrice $\boldsymbol{M}$ |
| Transpose[M] | transposée de la matrice $\boldsymbol{M}$ |
| Inverse[M] | inverse de la matrice $\boldsymbol{M}$ |
| Eigenvalues[M] | valeurs propres de la matrice $\boldsymbol{M}$ |
| Eigenvectors[M] | vecteurs propres de la matrice $\boldsymbol{M}$ |
| Eigenvalues[N[M]] | valeurs propres numériques |
| Eigenvectors[N[M]] | vecteurs propres numériques |
| LinearSolve[M,b] | trouve un vecteur $\boldsymbol{x}$ solution de $\boldsymbol{Mx} = \boldsymbol{b}$ |

La dernière commande est utile pour trouver les solutions d'un système d'équations linéaires, puisqu'il s'agit de l'algorithme de Gauss étudié au chapitre 8.

**Exemple 12.11** $\mathtt{M} = \{\{1,2\},\{1,3\}\}$ *attribue la matrice* $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ *à la variable* $\boldsymbol{M}$. $\mathtt{v} = \{1,2\}$ *attribue le vecteur* $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ *à la variable* $\boldsymbol{v}$. *Pour trouver le vecteur* $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, *solution de l'équation* $\boldsymbol{Mx} = \boldsymbol{v}$, *c'est-à-dire du système*

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &= 1 \\ x_1 + 3x_2 &= 2 \end{aligned}$$

*il faut utiliser la commande :*

*In[7]: =LinearSolve[M,v]*
*Out[7]: ={-1,1}.*

## 12.6 Définition d'une fonction

Jusqu'ici, nous avons vu quelques exemples de commandes de Mathematica qui permettent déjà de résoudre un grand nombre de problèmes. Nous allons maintenant voir comment on peut définir ses propres fonctions. La définition d'une fonction quadratique sous sa forme explicite $y = f(x) = ax^2 + bx + c$ se réalise par la commande suivante (attention de ne pas oublier le "_" après les variables de la fonction) :

$$\mathtt{f[x_] := a * x\hat{}2 + b * x + c.}$$

L'affichage des fonctions définies se fait au moyen de la commande ?`f`, et leur suppression par `Clear[`$f$`]`.

**Exemple 12.12** *Nous pouvons utiliser les fonctions ainsi définies avec différents arguments. Soit la fonction* $f(x) = x^2 + x - 6$. *Pour trouver son extremum, il suffit d'utiliser les commandes suivantes :*

1. *Définissons la fonction* $f(x)$ *:*
   *In[8]:* =`f[x_] := x^2 + x - 6`
2. *Recherchons le point candidat :*
   *In[9]:* =`Solve[D[f[x], x] == 0, x]`
   *Out[9]:* $=\{\{x\text{->}-(\frac{1}{2})\}\}$
   *Nous avons trouvé le point candidat* $x_0 = -\frac{1}{2}$. *Calculons encore* $y_0$, *l'image de* $x_0$ *:*
   *In[10]:* =`f[-1/2]`
   *Out[10]:* $=-(\frac{25}{4})$.
3. *Recherchons la seconde dérivée pour savoir de quel extremum il s'agit (minimum ou maximum) :*
   *In[11]:* =`D[f[x], x, x]`
   *Out[11]:* =2
   *Comme* $f''(x) = 2 > 0$, *la fonction f(x) admet un minimum au point* $(-\frac{1}{2}; -\frac{25}{4})$.

**Exemple 12.13** *Reprenons l'exemple 5.27, et résolvons-le à l'aide de Mathematica. Rappelons qu'il s'agit de trouver la quantité qui maximise le profit et le profit total en ce point, connaissant les fonctions de revenu marginal et de coût marginal.*

1. *Définissons les deux fonctions :*
   *In[12]:* =`RMa[x_] := 25 - 5 * x - 2 * x^2`
   `CMa[x_] := 15 - 2 * x - x^2`
2. *Recherchons le point où les fonctions se coupent (c'est-à-dire la borne droite d'intégration) :*
   *In[14]:* =`Solve[RMa[x] - CMa[x] == 0, x]`

# Exercices

1. Calculer les nombres suivants avec une précision de 15, 20, et 25 décimales :

   (a) $\frac{\sqrt{2^5 \cdot 7}}{12 \cdot \sqrt[3]{333}}$.

   (b) $e^{\frac{\pi \cdot \sqrt{2}}{35}}$.

   (c) $\sin\left(\frac{3\pi}{25}\right)$.

2. L'opérateur "?" suivi d'une commande (ou d'un symbole) permet (aussi) d'obtenir des informations sur les commandes incluses dans Mathematica.
   À quoi sert la commande Table?
   Créer une liste de dix 0.
   Créer la liste des dix premiers entiers positifs.
   Créer la liste des dix premiers cubes de nombres naturels.

3. Résoudre symboliquement, puis numériquement, l'équation $x^2 + x - 1$.
   Résoudre symboliquement, puis numériquement, le système d'équations suivant :
   $$\begin{array}{ll} x^2 + y^2 & = 4 \\ x^2 - y & = 2 \end{array}.$$

4. Trouver les racines du polynôme $p(x) = x^2 - 4x + 3$, ainsi que son minimum. De même pour $q(x) = x^2 - \frac{1}{4}x - \frac{3}{8}$.

5. Tracer dans le même système d'axes, pour $x$ allant de -7 à 7 les fonctions suivantes :
   $\cos(x)\,; \quad 1 - \frac{x^2}{2}\,; \quad 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}$ .

6. Visualiser la fonction $\sin(\tan(x)) - \tan(\sin(x))$ sur l'intervalle $[-4; 4]$ et nommer les axes $x$ et $y$.

   **Note** Le ";" à la fin de la ligne supprime l'affichage de `Out[]= Graphics`.

7. Faire le graphe de $f(x, y) = 2xy - 3x^2 + y^2$ pour $-2 \leq x, y \leq 2$.
   Résoudre l'équation $f(x, y) = 0$ sous contrainte $x = 1$.

8. Résoudre les exercices : 1, 2, 3, 5, 7, 15, 16, 18, 20 du chapitre 8 ainsi que les exercices de la partie analyse.



## RAMANUJAN Srinivasa Aiyangar (1887-1920)

Srivasa Ramanujan est né en décembre 1887 près de Madras, en Inde. Ne bénéficiant d'aucune éducation particulière, il sait déjà résoudre des équations de 3eme degré à l'age de 15 ans. Malgré le fait qu'il se fait renvoyer du collège parce qu'il néglige les autres matières, il poursuit sa formation en mathématiques en travaillant sur des séries hypergéométriques et en trouvant des relations entre les intégrales et les séries. Toujours en autodidacte, ayant comme seul livre de référence l'ouvrage de G.S Carr *Synopsis of elementary results on pure mathematics* (publié bien avant, en 1856), il s'intéresse aux fractions continues et aux séries divergentes jusqu'en 1908. C'est seulement en 1911 qu'il gagne la confiance et la reconnaissance de ses confrères mathématiciens, lorsqu'il publie un brillant article traitant des nombres de Bernoulli dans la revue *Journal of the Indian Mathematical Society.*

En 1914 le mathématicien G. H. Hardy l'emmène au Trinity College de Cambridge et c'est alors que commence une fructueuse collaboration entre les deux mathématiciens. Malgré sa santé fragile, il continue ses travaux de recherche dans les domaines des séries de Riemann, des intégrales elliptiques, des séries hypergéométriques et des équations fonctionnels de la fonction zeta. A sa mort en 1920, Ramanujan laisse un nombre immense de notes non-publiés sur lesquelles les mathématiciens ont continué de travailler.

# Chapitre 13

# Épilogue

*Le premier venu qui se met à danser, ne rencontre pas pour autant l'extase. C'est la danse qui résulte de l'état intérieur de l'âme ; ce n'est pas l'état intérieur de l'âme qui est le produit de la danse*

SOHRAVARDI : L'Archange empourpré

Ce que nous venons de voir dans les douze chapitres de ce livre peut sans doute être considéré comme une goutte d'eau, comparé à l'océan des résultats qui existent actuellement dans la science des mathématiques.

Les mathématiques forment aujourd'hui une science exceptionnelle ; elles fournissent les éléments essentiels de presque toute autre science. Il est difficile de trouver un phénomène naturel ou artificiel qui ne soit pas étudié ou qui ne soit pas étudiable en fonction des connaissances mathématiques. Le lecteur est mis au défi d'en trouver un !

La relation entre phénomènes et mathématiques, dans le sens inverse, est tout autant fascinante : c'est la recherche de champs d'applications pour les nouvelles découvertes mathématiques. Si l'on n'en trouve pas un aujourd'hui, on en trouvera presque certainement demain. La théorie mathématique des graphes, par exemple, n'était un jour qu'un édifice abstrait et élégant, mais sans utilité immédiate ; aujourd'hui, on l'utilise pour analyser les circuits et réseaux de tous genres, allant des réseaux de chemins de fer aux circuits électriques et même aux réseaux de connaissances qui se développent entre

individus.

Aujourd'hui, nous avons le privilège, avec une simple calculatrice, de faire les quatre opérations, c'est-à-dire additionner, soustraire, mutiplier et diviser et même parfois faire d'autres calculs plus compliqués en pressant une simple touche. Bien que nous vivions dans un monde de chiffres et de graphes, rien ne nous étonne. Sans réfléchir, on peut faire beaucoup en une fraction de seconde. Mais comment en sommes-nous arrivés là ? Une petite page d'histoire est nécessaire.

L'homme a probablement toujours compté, mais c'est plus tard qu'il s'est organisé pour en faire une méthode. On dit que les petites pierres ("calculi" en latin) données au berger, autant de pierres que de moutons afin de s'assurer qu'aucune bête n'a été perdue au retour du troupeau, sont à l'origine du mot "calcul".

Pour parcourir le chemin entre deux points, l'homme a probablement toujours essayé d'emprunter une ligne droite, mais c'est plus tard, beaucoup plus tard, à l'ère de Pythagore ($6^e$ siècle avant notre ère) qu'il en a fait une science. Pour aller de A à B en passant par C, il faut deux pas, mais pour aller de A à B tout droit, il n'en faut que la racine carrée de deux pas. Le calcul de cette valeur ($\sqrt{2}$) n'a pas été trivial, il a mis en cause le rapport entre la géométrie et l'arithmétique. C'est ainsi que se développera notre géométrie d'Euclide ($3^e$ siècle avant notre ère).

L'homme a probablement toujours juxtaposé le bien et le mal, le jour et la nuit, la pluie et la sécheresse, mais il a fallu de nombreux siècles pour en déduire l'analogue numérique. On dit que le Chinois, ouvert à l'idée que tout ce qui existe dans l'Univers est constamment animé par des couples de forces opposées, n'a pas eu de difficulté à admettre l'existence de nombres négatifs à l'opposé des nombres positifs. C'était le premier siècle de notre ère. Il est intéressant de noter qu'en Europe, même du temps de Diderot et de d'Alembert, on débattait de l'aspect fictif et absurde des nombres négatifs et l'impossibilité de leur existence !

La Terre, le soleil, la lune, les étoiles ont toujours fasciné l'Homme, mais beaucoup de préalables étaient nécessaires pour les étudier. Les grandes distances demandent de grands chiffres, et les grands chiffres demandent beaucoup de symboles pour les décrire. C'est donc le besoin de parcimonie qui a fait naître le principe de position, c'est-à-dire l'idée d'utiliser le même chiffre pour décrire différentes valeurs décimales d'après la position du chiffre. Avec cela, on n'a pas tardé à inventer le zéro pour ne pas confondre

la position unitaire de celle de la dixième, la dixième de la centième, etc. Et ainsi, nous devons aux astronomes et mathématiciens de l'Inde du 6[e] siècle ce système numérique net et ingénieux que nous avons appris à l'école et que nous apprenons à nos enfants.

Le passage régulier des jours, des saisons et des années a toujours été remarqué par l'homme, il y a inscrit d'ailleurs l'organisation de sa vie. Mais comment a-t-il imaginé un calendrier pour y donner de l'ordre ? Le nombre de jours dans une année n'est pas entier. Les restes, les fractions, les décimales sont à découvrir. Les Chinois, les Indiens l'ont fait au 8[e] siècle ; en Europe on l'a découvert au 16[e]. Pendant longtemps, la circonférence du cercle unitaire ($\pi$) se décrivait par la ratio de deux entiers, sans parvenir à la représentation décimale : $\frac{3}{1}$ (Babylone) ; $\frac{22}{7}$ (Archimède) ; $\frac{377}{120}$ (Ptolémée) ; $\frac{355}{113}$ (Chine 5[e] siècle, Nilakantha 15[e] siècle et Adrien Métius 16[e] siècle). Nous connaissons aujourd'hui $\pi$ à quelques kilomètres de pages de décimales près. Voici les premières décimales :

$\pi$ = 3.14159 26535 89793 23846 26433 83279 50288 41971 69399 37510
58209 74944 59230 78164 06286 20899 86280 34825 34211 70679 82148 08651
32823 06647 09384 46095 50582 23172 53594 08128 48111 74502 84102 70193
85211 05559 64462 29489 54930 38196 44288 10975 66593 34461 28475 64823
37867 83165 27120 19091 45648 56692 34603 48610 45432 66482 13393 60726
02491 41273 72458 70066 06315 58817 48815 20920 96282 92540 91715 36436
78925 90360 01133 05305 48820 46652 13841 46951 94151 16094 33057 27036
57595 91953 09218 61173 81932 61179 31051 18548 07446 23799 62749 56735
18857 52724 89122 79381 83011 94912 98336 73362 44065 66430 86021 39494
63952 24737 19070 21798 60943 70277 05392 17176 29317 67523 84674 81846
76694 05132 00056 81271 45263 56082 77857 71342 75778 96091 73637 17872
14684 40901 22495 34301 46549 58537 10507 92279 68925 89235 42019 95611
21290 21960 86403 44181 59813 62977 47713 09960 51870 72113 49999 99837
29780 49951 05973 17328 16096 31859 50244 59455 34690 83026 42522 30825
33446 85035 26193 11881 71010 00313 78387 52886 58753 32083 81420 61717
76691 47303 59825 34904 28755 46873 11595 62863 88235 37875 93751 95778
18577 80532 17122 68066 13001 92787 66111 95909 21642 01989 38095 25720
10654 85863 27886 59361 53381 82796 82303 01952 03530 18529 68995 77362
25994 13891 24972 17752 83479 13151 55748 57242 45415 06959 50829 53311
68617 27855 88907 50983 81754 63746 49393 19255 06040 09277 01671 13900
98488 24012 85836 16035 63707 66010 47101 81942 95559 61989 46767 83744
94482 55379 77472 68471 04047 53464 62080 46684 25906 94912 93313 67702

89891 52104 75216 20569 66024 05803 81501 93511 25338 24300 35587 64024
74964 73263 91419 92726 04269 92279 67823 54781 63600 93417 21641 21992
45863 15030 28618 29745 55706 74983 85054 94588 58692 69956 90927 21079
75093 02955 32116 53449 87202 75596 02364 80665 49911 98818 34797 75356
63698 07426 54252 78625 51818 41757 46728 90977 77279 38000 81647 06001
61452 49192 17321 72147 72350 14144 19735 68548 16136 11573 52552 13347
57418 49468 43852 33239 07394 14333 45477 62416 86251 89835 69485 56209
92192 22184 27255 02542 56887 67179 04946 01653 46680 49886 27232 79178
60857 84383 82796 79766 81454 10095 38837 86360 95068 00642 25125 20511
73929 84896 08412 84886 26945 60424 19652 85022 21066 11863 06744 27862
20391 94945 04712 37137 86960 95636 43719 17287 46776 46575 73962 41389
08658 32645 99581 33904 78027 59009 94657 64078 95126 94683 98352 ...!

Un mouton, un pas, une force, une étoile, une saison ! Il a fallu abstraire l'objet pour faire avancer la pensée. C'est ainsi que al-Khwārizmi (racine du mot "algorithme") est parvenu au 9e siècle à développer ce qu'il a appelé *al-jabr* (nécessité) et que nous appellerons en Occident l'algèbre. La notion de base, c'est la notion d'équation, qui peut couvrir une classe infinie de problèmes, géométriques ou arithmétiques : l'unité n'est plus l'objet, mais l'opération même. Pour $x$ inconnu représentant n'importe quel objet, on veut résoudre les équations $x + a = b$ ; $x^2 + a = bx$; $x^3 + ax = b$. C'est Khayyām, poète et mathématicien persan du 11e siècle qui donne une classification de l'ensemble des équations de degré $\leq 3$ et qui obtient leurs solutions. Il marie l'algèbre et la géométrie, et utilise l'intersection de deux coniques pour résoudre les équations, c'est la technique qui sera redécouverte en Europe six siècles plus tard.

Les douze siècles de notre ère et toute la période antérieure nous ont amenés à la solution de l'équation $x^3 + ax = b$, ce que nous avons aujourd'hui à la portée de la main. En outre, personne à l'époque n'aurait pu prédire quelles seraient les applications du système d'équations, développement mathémati-que sans lequel de nombreuses sciences appliquées n'auraient pu progresser. Nous sommes à mi-chemin dans l'histoire des mathématiques, mais cela suffit à expliquer comment nous en sommes arrivés là, grâce aux sacrifices de bon nombre de mathématiciens (**www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/history**) ! De même que la finalité du travail du mathématicien d'hier, inconnue et absurde à son époque, est indispensable aujourd'hui, de même le cumul des travaux des mathématiciens d'aujourd'hui devient entièrement indispensable aux problèmes de demain.

# Chapitre 14

# Quelques corrigés d'exercices

**Remarque** Le symbole " $\surd$ " assigné à certains exercices laisse au lecteur le soin de vérifier lui-même ses résultats.

### Chapitre 1

1. i) $A \cap B = \{\text{multiples de } 6\}$

   ii) $A \cap C = C$

   iii) $A \cup C = A$

   iv) $B \cup C = B$

   v) $C \cap D = \{\text{multiples de } 24\}$

2. Figures diagrammes de Venn

3. Démonstration

4. (a) $A \times (B \cup C) = \{(a, 1)\,;(a, 3)\,;(a, 4)\,;(a, 5)\,;(b, 1)\,;(b, 3)\,;(b, 4)\,;(b, 5)\}$

   (b) $(A \times B) \cup (A \times C) = \{(a, 1)\,;(a, 3)\,;(a, 4)\,;(a, 5)\,;(b, 1)\,;(b, 3)\,;(b, 4)\,;(b, 5)\}$

   (c) et (d) $A \times (B \cap C) = \; = (A \times B) \cap (A \times C)$

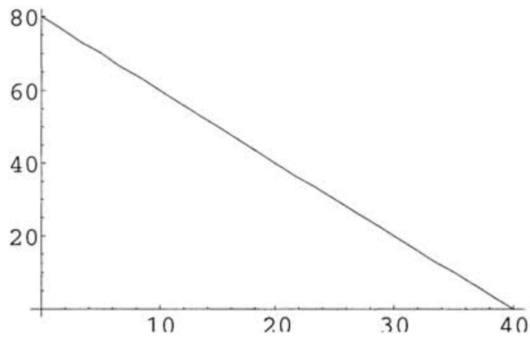
5. $Card(A \cup B) = 29$

6. Les employés bien portants sont au nombre de 15.

7. (a) 3
   (b) 34
   (c) 26
   (d) 8
8. $S_3$ et $S_4$
9. $\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = h + 2x + 2$
10. $\surd$
11. $f(-2) = f(1) = 0$
12. (a) $f(x) = e^x$
    (b) $g(x) = x^3 - x$
    (c) $h(x) = x^2 - x + \frac{1}{2}$
13. (a) $h(x) = 2x + 9$ et $m(x) = 2x + 7$
    (b) $f^{-1}(x) = x - 2$ et $g^{-1}(x) = \frac{x-5}{2}$
    (c) $h^{-1}(x) = \frac{x-9}{2}$ et $m^{-1}(x) = \frac{x-7}{2}$
    (d) $f^{-1}(g^{-1}(x)) = \frac{x-9}{2}$ et $g^{-1}(f^{-1}(x)) = \frac{x-7}{2}$
    (e) $(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$ et $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$
14. $y = \frac{8-x}{2}$ et $x = 8 - 2y$ : ces deux fonctions sont inverses l'une de l'autre.

## Chapitre 2

1. $y = -2x + 80$



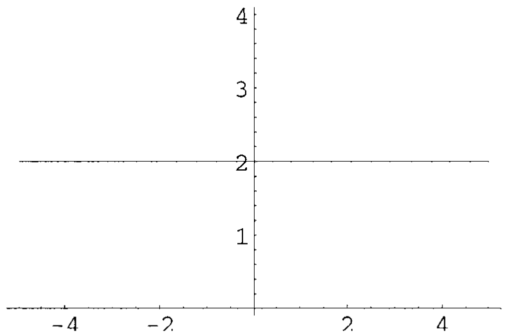
2. $(1;6)$

3. Offre : $y = 2x - 2$ et demande : $y = -x + 10$

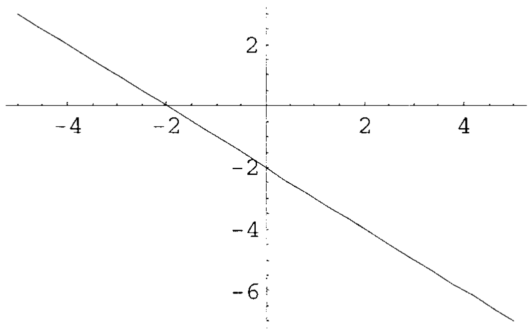
4. $(6.71; 3.18)$

5. $a = -1$ et $y_0 = 6$

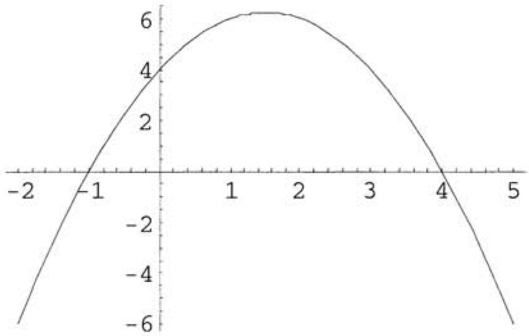
6. (a) $P_0(x) = 2$



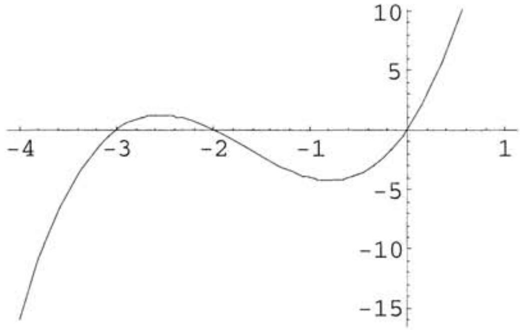

(b) $P_1(x) = -(x + 2)$



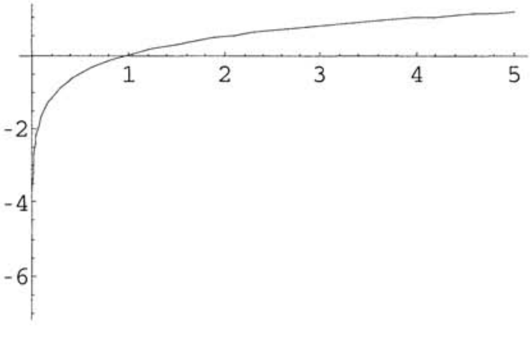

(c) $P_2(x) = -(x + 1)(x - 4)$



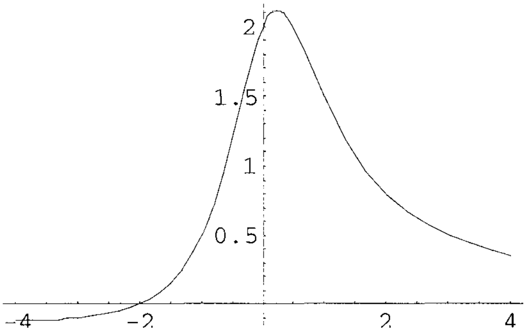

(d) $P_3(x) = 2x(x+2)(x+3)$



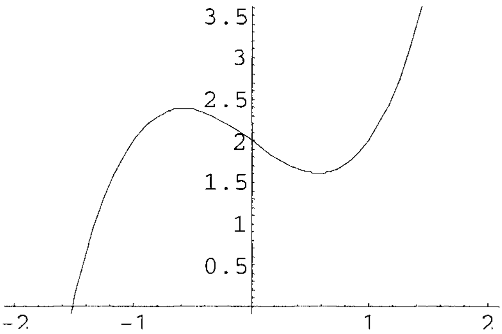

(e) $P_4(x) = (x-1)(x+1)(x+2)(x+3)$



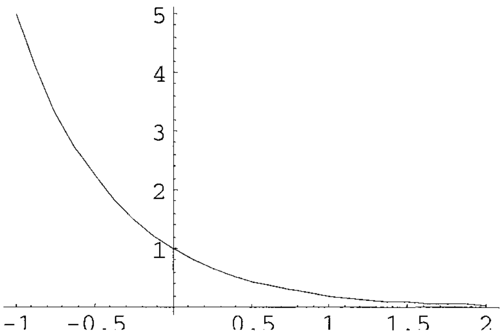
7. (a) $y = \frac{x+2}{x^2+1}$



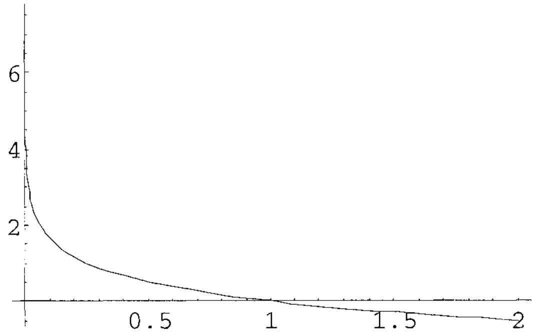

(b) $y = x^3 - x - 2$



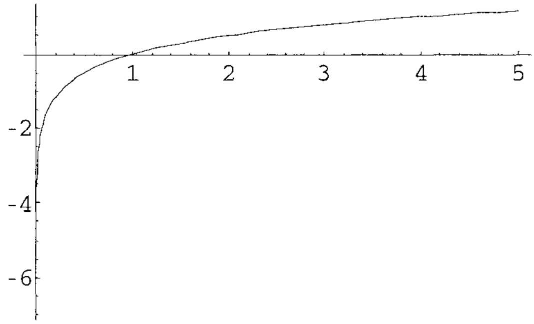

(c) $y = 0.2^x$



(d) $\log_{0.25}(x)$

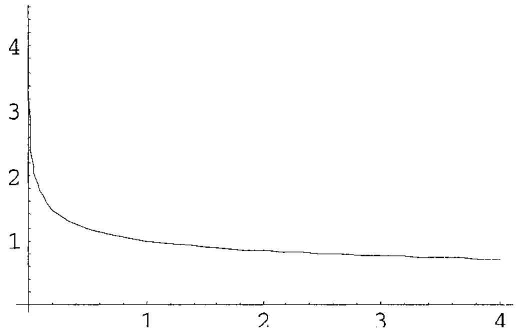



(e) $\log_4(x)$



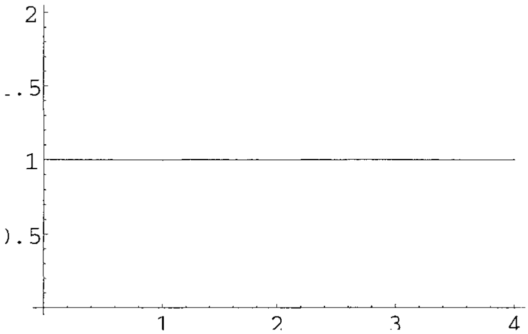

8. (a)$\mathbb{R}_+^*$

$y = x^{0.25}$



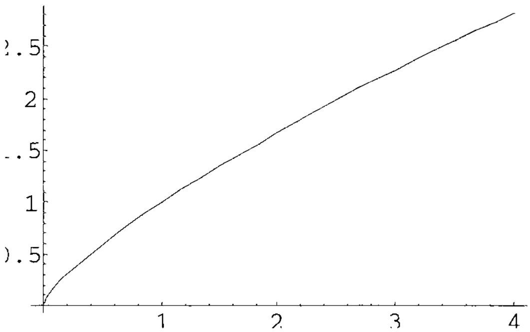

(b)$\mathbb{R}^*$

$y = x^0$



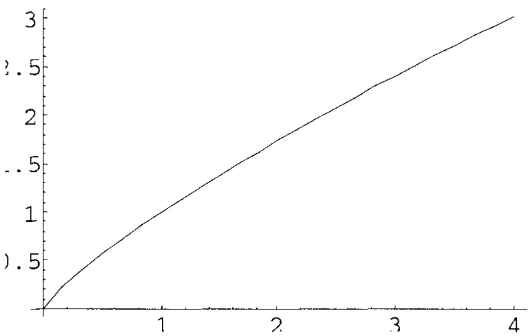

(c)$\mathbb{R}_+$

$y = x^{0.75}$



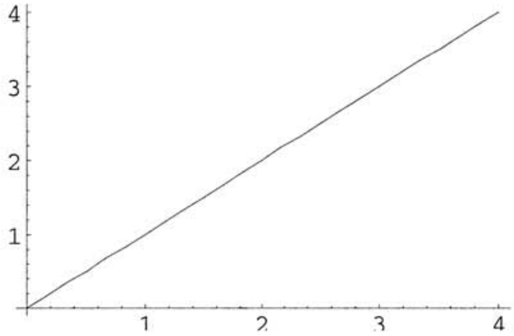

(d)$\mathbb{R}$

$y = x^{0.8}$




(e)$\mathbb{R}$

$y = x^1$




9. 15 ans
10. 5330.92
11. La première option est la plus avantageuse
12. 0.05
13. 3.5 %

## Chapitre 3

1. (a) $u_1 = \frac{2}{3};\ u_2 = \frac{5}{6};\ u_3 = \frac{8}{9};\ u_4 = \frac{11}{12};\ u_5 = \frac{14}{15}$
   (b) $u_0 = 1;\ u_1 = \frac{1}{3};\ u_2 = -\frac{1}{7};\ u_3 = \frac{1}{11};\ u_4 = -\frac{1}{15}$
   (c) $u_0 = 0;\ u_1 = 1;\ u_2 = 1;\ u_3 = \frac{9}{11};\ u_4 = -\frac{1}{15}$
   (d) $u_0 = 6;\ u_1 = 2;\ u_2 = 6;\ u_3 = 2;\ u_4 = 6$
2. (a) $u_n = \frac{n+2}{n^2}$
   (b) $u_n = \frac{(-1)^n}{n}$
   (c) $u_n = \frac{n^3}{2n} = \frac{n^2}{2}$
   (d) $u_n = \frac{(-1)^{n-1}(4n-3)}{2n^2}$
3. (a) $u_n$ est alternée, converge vers 0, bornée
   (b) $u_n$ est alternée, converge vers 0, bornée
   (c) $u_n$ est décroissante, diverge, non bornée
   (d) $u_n$ est croissante, diverge, non bornée

4. (a) $u_n = 2n + 3 \Longrightarrow u_{50} = 103$
   (b) $u_n = n^2 - 5 \Longrightarrow u_{50} = 2495$
   (c) $u_n = (-1)^n \frac{n}{n+2} \Longrightarrow u_{50} = \frac{25}{26}$
   (d) $u_n = \begin{cases} 8 & \text{si n est divisible par 3} \\ 1 & \text{sinon} \end{cases} \Longrightarrow u_{50} = 1$

5. (a) constante, bornée, convergente
   (b) alternée, non bornée, divergente
   (c) croissante, bornée, convergente, monotone
   (d) bornée, divergente
   (e) décroissante, non-bornée, divergente
   (f) monotone croissante, non bornée, divergente
   (g) alternée, bornée, divergente
   (h) divergente

6. (a) $N(\varepsilon) = \frac{2}{\varepsilon} \Longrightarrow N(0.1) = 20;\ \ N(0.01) = 200;\ \ N(0.001) = 2000$
   (b) $N(\varepsilon) = \frac{3-4\varepsilon}{\varepsilon} \Longrightarrow N(0.1) = 26;\ \ N(0.01) = 296;\ \ N(0.001) = 2996$

7. (a) $0$ ; (b)$+\infty$ ; (c)$\frac{a}{k}$

8. (a) discontinuité réparable : trou
   (b) discontinuité finie : saut
   (c) continue
   (d) continue

9. (a) $f'(x) = (2x+1)^{-\frac{1}{2}}$
   (b) $f'(x) = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}$
   (c) $f'(x) = \frac{1}{x^2}$

10. $\surd$

11. (a) $f^{(n)}(x) = c^n e^{cx}$

    (b) $f^{(n)}(x) = \begin{cases} (-1)^{\frac{n+1}{2}} \sin(x) & \text{si n est impair} \\ (-1)^{\frac{n}{2}} \cos(x) & \text{si n est pair} \end{cases}$ c) $f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}}$

    (d) $f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^{n+1}(n-1)!}{x^n}$

12. (a) $\frac{-2\cos\sqrt{1-4x}}{\sqrt{1-4x}}$
    (b) $\frac{1}{3x+4}$
    (c) $2e^{2x}$
    (d) $\frac{x(2x^3+3x+4)}{x^3+2}$
    (e) $\cosh(x)$
    (f) $-\frac{1}{\sin^2(x)}$

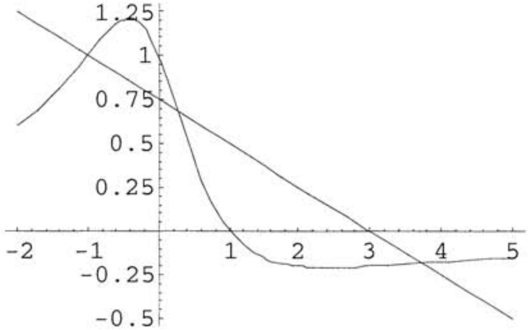
13. $\surd$

## Chapitre 4

1. (a) $x = y = 50$
   (b) $x = y = 50$

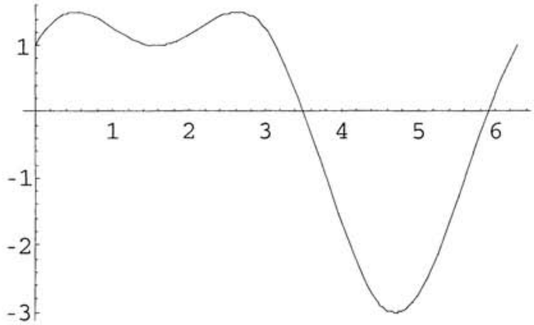
2. côté de la face carré : $\sqrt{\frac{35}{3}}$ et autre côté : $\frac{6}{7}$

3. Les points d'inflexion sont $(-1;1)$, $(0.268;0.683)$ et $(3.732;-0.183)$. Ils appartiennent à la droite $y = -\frac{1}{4}x + \frac{3}{4}$



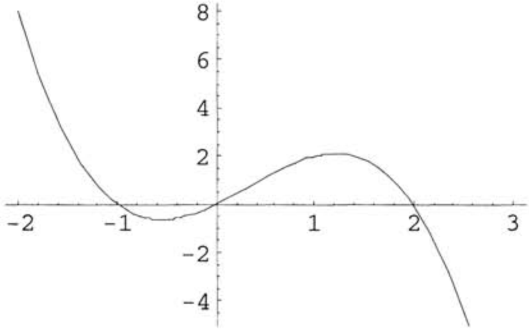
4. Si $V = \pi r^2 h$, il faut que : $r = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$ et $h = \frac{V}{\pi r^2}$

5. $y = 2\sin(x) + \cos(2x)$
   maxima : $\left(\frac{\pi}{6}; \frac{3}{2}\right)$ et $\left(\frac{5\pi}{6}; \frac{3}{2}\right)$
   minimum relatif : $\left(\frac{\pi}{2}; 1\right)$ et minimum $\left(\frac{3\pi}{2}; -3\right)$

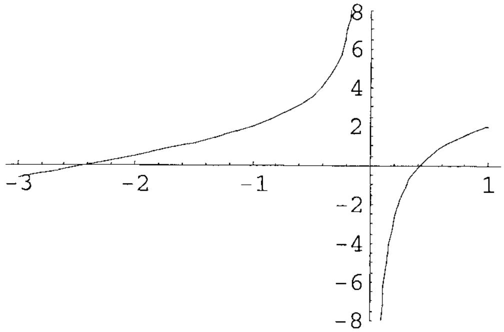



6. Pour un cercle de rayon $r$, le côté du rectangle qui maximise l'aire est $r\sqrt{2}$ et correspond à un carré d'aire $2r^2$

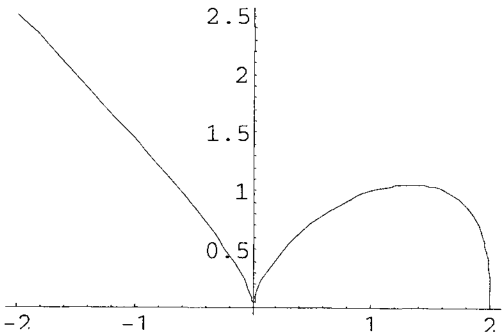
7. $y = -x^3 + x^2 + 2x$



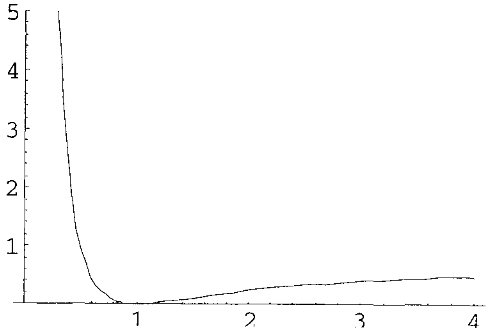

8. $y = \frac{x^2+2x-1}{x} = x + 2 - \frac{1}{x}$
   on a une asymptote oblique : $y = x+2$ et une asymptote verticale $x = 0$




9. $y = (2x^2 - x^3)^{\frac{1}{3}}$



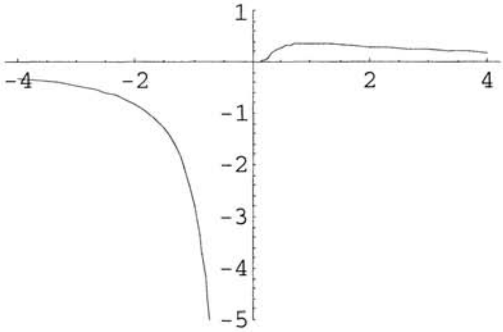

10. $y = \frac{(\ln(x))^2}{x}$



| | | |
|---|---|---|
| (a) $\infty$ | (b) 1 | (c) $a$ |
| (d) $n \cdot b^{n-1}$ | (e) $\frac{1}{4}$ | (f) 3 |
| (g) 0 | (h) 0 | (i) $\frac{1}{4}$ |

11. $y' = 3ax^2+2bx+c = 0$ a deux solutions $x_1$ et $x_2$ avec $y''(x_1) \cdot y''(x_2) < 0$. Ainsi, on a un minimum et un maximum.

12. $y = \frac{e^{\frac{1}{-x}}}{x}$

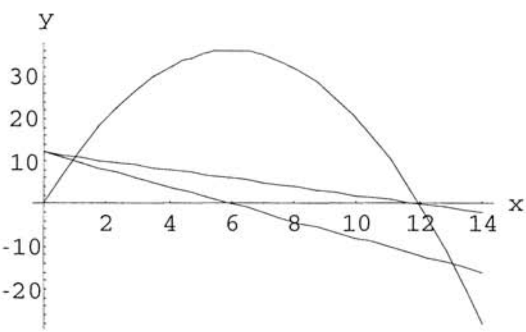



(a) Coût marginal $= 6x^2 - 6x - 12$

(b) Coût moyen $= 2x^2 - 3x - 12$
Le coût moyen est minimal pour $x = \frac{3}{4}$

(c) Non

13. $x = y = 6$



14. $q = 30$

    $PT = 224.1$

    $p = 15.18$ francs

**Chapitre 5**

1. (a) $-\frac{1}{2}\cos(2x) + c$
   (b) $\frac{1}{2}\sin^2(x) + c$
   (c) $(x^2 - x - 4)\, e^x + c$
   (d) $\frac{1}{2}\ln^2|x| + 3\ln|x| + c$
   (e) $\left(\frac{1}{a}x - \frac{1}{a^2}\right) e^{ax} + c$
   (f) $\frac{1}{3}\ln|3x+1| + c$
2. (a) $x(\ln(x) - 1) + c$
   (b) $\frac{1}{2}x^2\left(\ln(x) - \frac{1}{2}\right) + c$
   (c) $-x^2\cos(x) + 2x\sin(x) + 2\cos(x) + c$
   (d) $\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin(2x)$
3. $CT = -\frac{4}{3}x^3 + 25x^2 + 3x + 60$
4. $RT = \frac{1}{3}x^3 - 3x^2 + 10x + 0$
   demande : $\frac{1}{3}x^2 - 3x + 10$
5. $y = \frac{1}{6}x^3 + \frac{5}{2}x^2 - \frac{13}{2}x + \frac{35}{6}$
6. (a) $\ln(17) = 2.8332$
   (b) $-\ln\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 0.34657$
   (c) 0.689
   (d) $k^2$
   (e) $\frac{1}{x^2}$ n'est pas définie en $x = 0$
7. $a = \sqrt[3]{6} = 1.8171$
8. L'excédent du consommateur est de 8 et les deux méthodes sont :
   $\int_0^4 (8-x)\,dx - 4(8-4) = \int_4^8 (8-y)\,dy = 8$

9. Excédent du producteur $= 13.5$

10. $\frac{32}{3}$

11. (a) $-\frac{1}{2}\left(1-2x^2\right)^{\frac{3}{2}}+c$
    (b) $\frac{3}{4}\left(x^2+6x\right)^{\frac{8}{3}}+c$
    (c) $\frac{1}{2}\ln|2x-4|+c$
    (d) $\frac{1}{2}\left(e^x+1\right)^2+c$
    (e) $-ln\left(1+e^{-x}\right)+c$
    (f) $-3\ln\left(e^x+1\right)+e^x+1+c$
    (g) $\frac{1}{3}\left(1+x^2\right)^{\frac{3}{2}}-\sqrt{1+x^2}+c$

12. (a) 1
    (b) n'existe pas
    (c) 1

## Chapitre 6

1. Démonstration par récurrence de $S_n = 2^{n+1} - 1$

2. $S_1 = \frac{1}{2}$, $S_2 = \frac{2}{3}$, $S_3 = \frac{3}{4}$, $S_4 = \frac{4}{5}$, $S_n = \frac{n}{n+1} \longrightarrow 1$ lorsque $n \longrightarrow \infty$

3. $\surd$

4. (a) Série géométrique de raison $\frac{1}{5}$ qui converge donc vers $\frac{1}{1-\frac{1}{5}} = \frac{5}{4}$

   (b) Série géométrique de raison $\frac{1}{2}$ à laquelle on a ajouté 2 et 3 qui converge donc vers $2+3+\frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 7$

5. (a) $\frac{31}{3} = 10.333$
   (b) $\frac{1}{1-\frac{1}{3}} - 1 = \frac{1}{2}$

6. (a) $\sum \frac{n}{3^n}$ converge par D'Alembert
   (b) $\sum \frac{2^n}{n!}$ converge par D'Alembert
   (c) $\sum \frac{(-1)^{n-1}}{2^n}$ converge par Leibniz
   (d) $\sum \frac{n!}{n^n}$ converge par D'Alembert

7. (a) converge par D'Alembert

   (b) diverge par comparaison avec la série harmonique

   (c) converge par comparaison avec la série de Riemann pour $p = 3$

   (d) converge

8. (a) converge pour $x \in [-1; 1[$

   (b) converge pour $x \in ]-1; 1[$

   (c) converge pour $x = 2$

   (d) converge pour $x \in [2; 8[$

9. (a) $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots$ pour $x \in ]-\infty; \infty[$

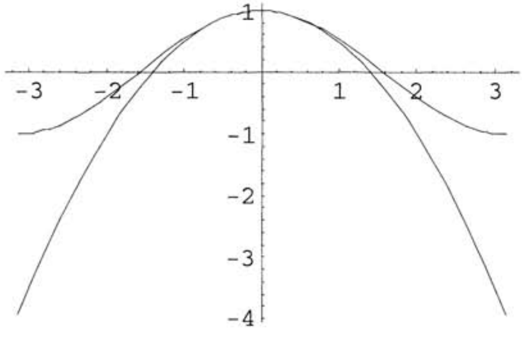
   (b) $\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots$ pour $x \in ]-\infty; \infty[$

   (c) $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \ldots$ pour $x \in ]-1; 1]$

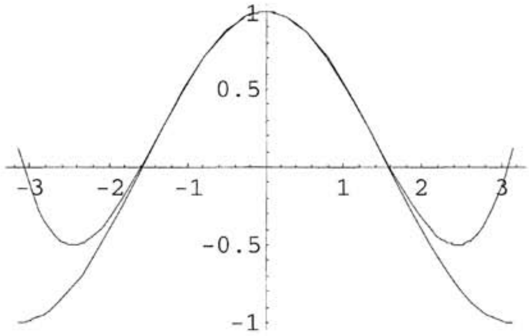
   Ainsi, $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots = \ln(1+1) = \ln(2) = 0.69315$

10. $e^{\frac{x}{4}} = e + \frac{e}{4}(x-4) + \frac{e}{4^2 2!}(x-4)^2 + \frac{e}{4^3 3!}(x-4)^3 + \frac{e}{4^4 4!}(x-4)^4 + \ldots$

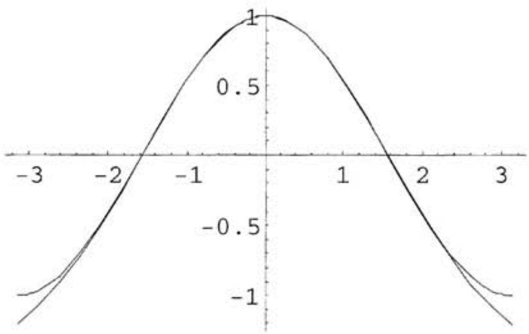
11. (a)




   (b)




(c)




12. $\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots$ ainsi $\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) \simeq 0.8660$

13. $\sqrt{x} = 1 + \frac{1}{2}(x-1) - \frac{1}{2\cdot 4}(x-1)^2 + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6}(x-1)^3 - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}(x-1)^4 + \ldots$ ainsi $\sqrt{1.21} \simeq 1.100$

## Chapitre 7

1. (a) $\frac{\partial f}{\partial x} = 6x^2y^4 - \frac{1}{x^2}$ $\quad \frac{\partial f}{\partial y} = 8x^3y^3$ $\quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 12xy^4 + \frac{2}{x^3}$ $\quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 24x^3y^2$ $\quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 24x^2y^3$

   (b) $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{x+y}$ $\quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{x+y}$ $\quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -\frac{1}{(x+y)^2}$ $\quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -\frac{1}{(x+y)^2}$ $\quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -\frac{1}{(x+y)^2}$

   (c) $\frac{\partial f}{\partial x} = \cos(x)\cos(y)$ $\quad \frac{\partial f}{\partial y} = -\sin(x)\sin(y)$ $\quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -\sin(x)\cos(y)$

   $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -\sin(x)\cos(y)$ $\quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -\cos(x)\sin(y)$

   (d) $\frac{\partial f}{\partial x} = \cos(x+y)\,e^{\sin(x+y)}$ $\quad \frac{\partial f}{\partial y} = \cos(x+y)\,e^{\sin(x+y)}$

   $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \left[-\sin(x+y) + \cos^2(x+y)\right]e^{\sin(x+y)}$ $\quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ $\quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$

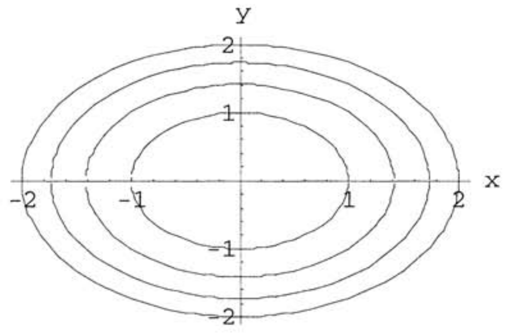
2. $\frac{\partial C}{\partial x} = 2\ln(2y+3)$ $\frac{\partial C}{\partial y} = \frac{4x}{3+2y}$

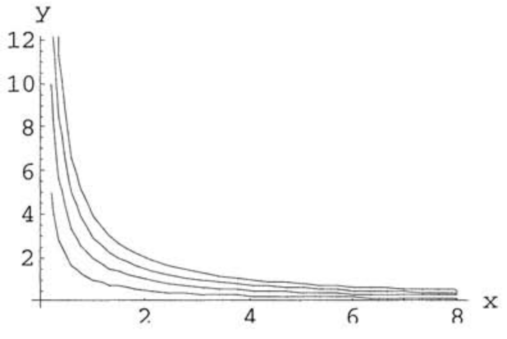
3. (a) $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{2}x^{-\frac{3}{4}}y^{\frac{3}{8}}$ $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{3}{4}x^{\frac{1}{4}}y^{-\frac{5}{8}}$

   (b) $\frac{\partial z}{\partial x} = y + 12x^2y^2 - 6$ $\frac{\partial z}{\partial y} = x + 8x^3y$

   (c) $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}y^{\frac{1}{3}}$ $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{3}x^{\frac{1}{3}}y^{-\frac{2}{3}}$

4.




1. (a) point-selle en $(0;0;0)$ et minimum en $(1;1;-1)$

   (b) minimum en $\left(-\frac{4}{3};\frac{1}{3};-\frac{4}{3}\right)$

2. On a un candidat $\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$ mais le test échoue.

3. minimum sous contrainte : $\left(\frac{3}{\sqrt{2}};\frac{3}{\sqrt{2}};2\sqrt{3}\right)$

   maximum sous contrainte : $\left(-\frac{3}{\sqrt{2}};-\frac{3}{\sqrt{2}};-2\sqrt{3}\right)$

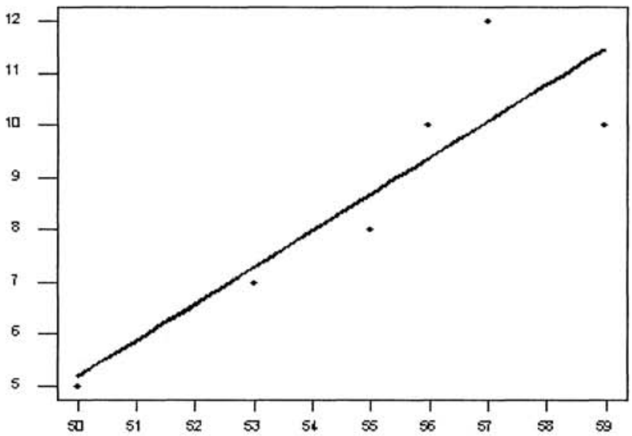
4. $F(x;y) = x^2 + 2y^2 - xy - \lambda(x + y - 8)$ avec pour minimum $(5;3)$

5. $\left(\frac{27}{4}; \frac{45}{8}\right)$

6. $\widehat{a} = \overline{y} - \widehat{b}\overline{x}$ et $\widehat{b} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - n\overline{yx}}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - n\overline{x}^2}$ où $\overline{x} = \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{n}$ et $\overline{y} = \sum_{i=1}^{n} \frac{y_i}{n}$

7. $\overline{x} = 55$ et $\overline{y} = \frac{26}{3}$ $\widehat{a} = -\frac{179}{6} = -29.833$ et $\widehat{b} = \frac{35}{50} = 0.7$

8.




## Chapitre 8

1. (a) $\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} -5 & -2 \\ 0 & 2 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$

   (b) $\boldsymbol{D} = \begin{pmatrix} -\frac{7}{4} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{7}{4} \\ \frac{1}{4} & -\frac{3}{4} \end{pmatrix}$

2. (a) $\begin{pmatrix} 9 & -22 & 13 & 28 \\ 25 & 2 & 5 & 56 \end{pmatrix}$

   (b) $(-21)$

3. (a) $\boldsymbol{AB}$=$\boldsymbol{BA}$= $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

   (b)$\surd$

   (c)$\surd$

4. Il faut que $\boldsymbol{AB}$=$\boldsymbol{BA}$

5. $\surd$

6. $\surd$

7. $\surd$

8. Non, les éléments diagonaux sont des sommes de carrés qui doivent être nuls, donc tous les éléments de $\boldsymbol{A}$ doivent être nuls.

9. Ce sont les matrices diagonales

10. $\boldsymbol{A}$= $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ ou $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

11. $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{C}$= $\begin{pmatrix} 13 & -27 \\ -4 & 13 \end{pmatrix}$ et $(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{C})' = \begin{pmatrix} 13 & -4 \\ -27 & 13 \end{pmatrix}$ avec $Tr\,(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{C})' = Tr\,(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{C}) = 26$

12. minimum en $x = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ et maximum en $x = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$

13. $a = 4$, $b = -\frac{3}{2}$, $c = -1$, $d = \frac{1}{2}$

14. (a)9, (b)19, (c)105

15. det$\boldsymbol{A}$= 45, det$\boldsymbol{B}$= 209, det$\boldsymbol{C}$= −387, det$\boldsymbol{D}$= 0

16. $\surd$

17. det$\boldsymbol{A}$= $x^4 - 4x^2 = x^2\,(x^2 - 4)$

   (a) det$\boldsymbol{A}$= 0 pour $x = -2$, 0 ou 2

   (b) maximum local en $x = 0$

   (c) minimum en $x = \pm\sqrt{8}$

18. $\boldsymbol{AB} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 8 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 12 & 12 \\ 0 & 0 & 20 & 0 & 0 \\ 0 & 20 & 0 & 0 & 0 \\ 20 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

    $|\boldsymbol{A}| = -750$, $|\boldsymbol{B}| = 0$, $|\boldsymbol{AB} = 0|$

19. $\surd$

20. $\boldsymbol{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -5 \\ -18 & 1 & 24 \\ -3 & 0 & 4 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B}^{-1}$ n'existe pas, $\boldsymbol{C}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & -3 & 1 \end{pmatrix}$

## Chapitre 9

1. $\surd$

2. $r(\boldsymbol{A}) = 3$, $r(\boldsymbol{B}) = 1$, $r(\boldsymbol{C}) = 2$

3. (a) $x_1 = -\frac{7}{2}$, $x_2 = \frac{19}{8}$, $x_3 = -\frac{3}{4}$

   (b) $x_1 = \frac{43}{32}$, $x_2 = \frac{47}{4}$, $x_3 = \frac{17}{32}$

4. (a) $b = -18$

   (b) $x_1 = -x_2 + 2x_3 - 4x_4 + 6$

5. (a) compatible

   (b) non, une infinité de solutions

6. (a) une infinité de solutions avec $x_1 = x_2 = x_3$

   (b) une infinité de solutions avec $x_1 = \frac{1}{2}s$, $x_2 = \frac{3}{2}s$, $x_3 = 0$, $x_4 = s$

7. (a) $\beta = -3$

   (b) $\beta \neq -3$ et $\beta \neq 2$

   (c) $\beta = 2$

## Chapitre 10

1. Les vecteurs sont linéairement dépendants car $-3\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\5\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$

2. $\boldsymbol{D}=3\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{B}-\boldsymbol{C}$

3. $a=1$, $b=-8$, $c=1$

4. (a) $x$ doit être différent de -1, 0, 1.

   (b) $\lambda_1=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $\lambda_2=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$

5. Pour $\boldsymbol{A}$: $\lambda_1=1$, $v_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ ; $\lambda_2=3$, $v_2=\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$ ; $\lambda_3=-1$, $v_3=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$

   Pour $\boldsymbol{B}$: $\lambda_1=-1$, $v_1=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ ; $\lambda_2=2$, $v_2=\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}$ ; $\lambda_3=-3$, $v_3=\begin{pmatrix}1\\0\\-2\end{pmatrix}$

   Pour $\boldsymbol{C}$: $\lambda_1=0$, $v_1=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$ ; $\lambda_2=-2$, $v_2=\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$ ; $\lambda_3=4$, $v_3=\begin{pmatrix}1\\0\\-2\end{pmatrix}$

6. (a) pas de valeurs propres pour $a\in\,]-2;2[$

   (b) valeurs propres de $\boldsymbol{B}$: $\lambda_1=1$, $\lambda_2=2$ avec pour vecteurs propres $v_1=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ et $v_2=\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$ qui sont linéairement indépendants

7. $\surd$

**Chapitre 11**

1. $x = 20$, $y = 10$, $f(20, 10) = 80$ est un minimum

2. (a) $x_1 = 50$, $x_2 = 100$, $x_3 = 250$, $\overline{R} = 50$

   (b) $x_1 = 125$, $x_2 = 150$, $x_3 = 125$,
   $V(125, 150, 125) = 6000 > V(50, 100, 250) = 4000$

3. (a) maximum en $K = L = 4$, $B = 64$

   (b) maximiser $Q = 8K^{\frac{3}{8}}L^{\frac{1}{8}}$ sous contrainte $64K^{\frac{3}{8}}L^{\frac{1}{8}} - 12K - 4L - 48 = 0$

   $F(K, L, \lambda) = (1 + 8\lambda) Q - \lambda (12K + 4L + 48)$ réalise son maximum lorsque $K = L$

   Bénéfice maximum : 48 avec $K = L = 9$ et $Q = 3$

4. $K = 10$, $L = 40$, $Q = 113.14$, $p_k = 3$

5. $x = y = \frac{1}{2}$ et $z = 0.693$

6. (a) $R = pq = -3q^2 + 100q + 4Iq$

   (b) $q = I = 10$ pour un bénéfice de 200

7. (a) $x = 5, y = 10, z = 5, u = 1250$

   (b) $x = 5, y = 12, z = 4, u = 1200$

8. Candidat $x = y = 5$, $z = 0$, $f(5; 5; 0) = 0$ c'est un minimum

9. $K = L = 16$ coût de production : 96 c'est un minimum

10. $x = y = \frac{3}{\sqrt{2}}$ réalise un maximum et $x = y = -\frac{3}{\sqrt{2}}$ un minimum

11. $x = 5$, $y = 6$, $f(x; y) = -10$, c'est un minimum

12. $x = 0$, $y = 12$ et $U = 864$ c'est un maximum

**Chapitre 12 : Exercices sur Mathematica**

1. *In[1]:* = `N[Sqrt[7*2^5]/(12*333^(1/3)),15]`

   *Out[1]:* = 0.179940125323312

   *In[2]:* = `N[Sqrt[7*2^5]/(12*333^(1/3)),20]`

   *Out[2]:* = 0.17994012532331177076

   *In[3]:* = `N[Sqrt[7*2^5]/(12*333^(1/3)),25]`

   *Out[3]:* = 0.1799401253233117707584789

   *In[4]:* = `N[E^(Pi*Sqrt[2]/35),15]`

   *Out[4]:* = 1.13534834134303

   *In[5]:* = `N[E^(Pi*Sqrt[2]/35),20]`

   *Out[5]:* = 1.1353483413430344339

   *In[6]:* = `N[E^(Pi*Sqrt[2]/35),25]`

   *Out[6]:* = 1.135348341343034433875871

   *In[7]:* = `N[Sin[3Pi/25],15]`

   *Out[7]:* = 0.368124552684678

   *In[8]:* = `N[Sin[3Pi/25],20]`

   *Out[8]:* = 0.36812455268467795592

   *In[9]:* = `N[Sin[3Pi/25],25]`

   *Out[9]:* = 0.3681245526846779559156947

2. *In[1]:* = `? Table`

   *Out[1]:* =
   ```
   Table[expr,{imax}] generates a list of imax
   copies of expr.
   Table[expr,{i,imax}] generates a list of the values of expr
   when i runs from 1 to imax.
   Table[expr,{i,imin,imax}] starts with i=imin.
   Table[expr,{i,imin,imax,di}] uses steps di.
   Table[expr,{i,imin,imax},{j,jmin,jmax},...] gives a nested
   list. The list associated with i is outermost.
   ```

   *In[2]:* = `Table[0,{10}]`

   *Out[2]:* = `{0,0,0,0,0,0,0,0,0,0}`

*In[3]:* = `Table[n,{n,10}]`

*Out[3]:* = `{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10}`

*In[4]:* = `Table[n^3,{n,10}]`

*Out[4]:* = `{1,8,27,64,125,216,343,512,729,1000}`

3. *In[1]:* = `Solve[x^2+x-1==0,x]`

   *Out[1]:* = {{x->$\frac{1}{2}\left(-1-\sqrt{5}\right)$},{x->$\frac{1}{2}\left(-1+\sqrt{5}\right)$}}

   *In[2]:* = `NSolve[x^2+x-1==0,x]`

   *Out[2]:* = {{x->$-1.61803$},{x->$0.618034$}}

   *In[3]:* = `Solve[{x^2+y^2==4,x^2-y==2},{x,y}]`

   *Out[3]:* = {{y->-2,x->0},{y->-2,x->0},
   {y->1,x->-$\sqrt{3}$},{y->1,x->$\sqrt{3}$}}

   *In[4]:* = `NSolve[{x^2+y^2==4,x^2-y==2},{x,y}]`

   *Out[4]:* = {{y->-2.,x->0.}, {y->-2.,x->0.},
   {y->1.,x->-1.73205}, {y->1,x->1.73205}}

4. *In[1]:* = `p[x_]: =x^2-4x+3;`

   *In[2]:* = `Solve[p[x]==0,x]`

   *In[3]:* = `Solve[D[p[x],x]==0,x]`

   *Out[2]:* = {{x->1},{x->3}}

   *Out[3]:* = {x->2}

   *In[4]:* = `q[x_]: =x^2-x/4-3/8;`

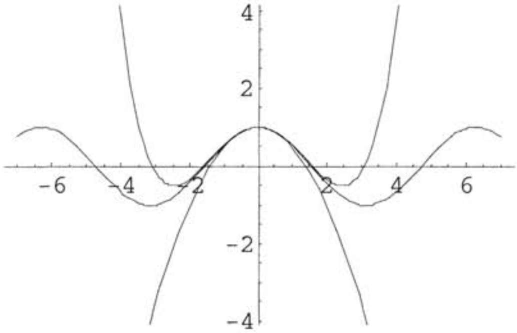
   *In[5]:* = `Solve[q[x]==0,x]`

   *In[6]:* = `Solve[D[q[x],x]==0,x]`

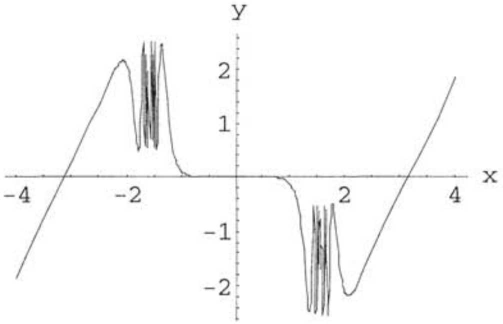
   *Out[5]:* = {{x->-$\frac{1}{2}$},{x->$\frac{3}{4}$}}

   *Out[6]:* = {x->$\frac{1}{8}$}

5. *In[1]:* = `Plot[{Cos[x],1-x^2/2,1-x^2/2+x^4/24},{x,-7,7}];`

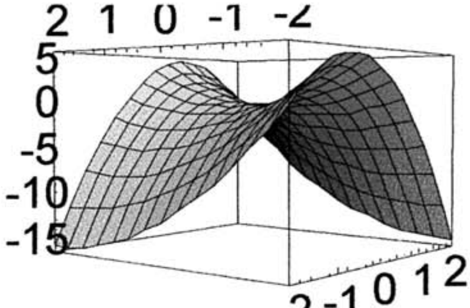



6. *In[1]:* = `Plot[Sin[Tan[x]]-Tan[Sin[x]],{x,-4,4}, AxesLabel->{x,y}];`




7. *In[1]:* = `f[x_,y_]: =2*x*y-3*x^2+y^2;`

   *In[2]:* = `Plot3D[f[x,y],{x,-2,2},{y,-2,2}, ViewPoint->{-2.673,-2.070,0.110};`




1. *In[3]:* = `Solve[f[1,y]==0,y]`

   *Out[3]:* = `{{y->-3},{y->1}}`

# Bibliographie


[1] Abell, M. L. et Braselton, J. P. (1994). Mathematica by example, revised edition. Academic Press Professional, Cambridge.

[2] Allen, R.G.D. (1965). Mathematical Economics. Macmillan, London, 2e édition.

[3] Archinard, G. (1992). Principes mathématiques pour économistes. Economica, Paris.

[4] Archinard, G. et Guerrien, B. (1988). Analyse mathématique pour économistes. Economica, Paris, 3e édition.

[5] Ayres, F.Jr. (1972). Théorie et applications du calcul différentiel et intégral. Série de Schaum, McGraw-Hill Inc, New York.

[6] Ayres, F.Jr. (1973). Matrices. Série de Schaum, McGraw-Hill Inc, New York.

[7] Bahder, T. B. (1995). Mathematica for Scientists and Engineers. Addison-Wesley.

[8] Bhatia, R.(1997). Matrix analysis. Springer, New-York.

[9] Balestra, P. (1972). Calcul matriciel pour économistes. Éditions Castella, Albeuve.

[10] Bismans, F. (1999). Mathématiques pour l'économie. De Boeck Université, Paris.

[11] Blachman, N. (1992). Mathematica : a practical approach. Prentice Hall, Englewood Cliffs.

[12] Bouzitat, C. (1991). Algèbre linéaire. Cujas, Paris.

[13] Boucher, C. et Sagnet, J.P. (1985). Calcul différentiel et intégral I. Gaëten Morin, Québec.

[14] Cahen, G. (1964). Eléments de calcul matriciel. Dunod, Paris.

[15] Calame, A. (1967). Mathématiques modernes III. Éditions du Griffon, Neuchâtel.

[16] Chiang, A.C. (1984). Fundamental methods of mathematical economics. McGraw-Hill, Singapore.

[17] Crandall, E. R. (1991). Mathematica for the Sciences, Addison-Wesley.

[18] Culioli, J.-C. (1991). Introduction à Mathematica. Édition Marketing, Paris.

[19] Deschamps, P. (1988). Cours de mathématiques pour économistes. Dunod, Paris.

[20] Dodge, Y. (1999). Analyse de régression appliquée. Dunod, Paris.

[21] Dodge, Y. (1999). Premiers pas en statistique. Springer-Verlag France, Paris.

[22] Dodge, Y. (1987). Programmation linéaire. EDES, Neuchâtel.

[23] Don, E. (2000). Mathematica. Schaum's outline of Mathematica. McGraw-Hill, New York.

[24] Dumoulin, D. (1993). Mathématiques de gestion : cours et applications. Economica, Paris, 4e édition.

[25] Encyclopaedia Universalis (1997). Dictionnaire des mathématiques : algèbre, analyse, géométrie. Encyclopaedia Universalis et Albin Michel, Paris.

[26] Esch, L. (1992). Mathématique pour économistes et gestionnaires. De Boeck Univ., Bruxelles.

[27] Glaisler, S. (1972). Mathematical methods for economists. New Edition, Oxford.

[28] Golestan, S. (1988). Le vin de Nishapour : Promenades photographiques dans les Rubāiyāt du poète Omar Khayyām. Souffles, Paris.

[29] Granville, W.A., Smith P.F. et Longley W.R. (1970). Eléments de calcul différentiel et intégral. Vuibert, Paris.

[30] Graybill, F.A. (1969). Introduction to matrices with applications in statistics. Wadworth, Belmont (California).

[31] Grun-Réhomme, M. (1987). Mathématiques appliquées à la gestion. Masson, Paris.

[32] Guerrien, B. (1991). Algèbre linéaire pour économistes. Economica, Paris, 3e édition.

[33] Guerrien, B. (1991). Initiation aux mathématiques : sciences économiques et sociales : algèbre, analyse, statistique. Economica, Paris, 2e édition.

[34] Guerrien, B. et Nezeys, B. (1982). Microéconomie et calcul économique. Economica, Paris.

[35] Hadley, G. (1961). Linear algebra. Addison-Wesley, Reading.

[36] Kasir, D.S. (1972). The Algebra of Omar Khayyām. AMS Press, New York.

[37] Keisler, H.J. (1976). Elementary calculus. Prindle Weber & Schmidt, Massachusetts.

[38] Kinchin, A. (1960).A course of mathematical analysis. Hindustan, Dehli.

[39] Lahaderne, J.-J. et Fourcade G. (1985). Des mathématiques à l'économie.... Edition Marketing, Paris.

[40] Lions, J.L., Aubin J.P., Glowinski R. et al. (1980). Petite encyclopédie des mathématiques. Editions K. Pagoulatos, Paris-Londres-Athènes.

[41] Lipschutz, S. (1994). Algèbre linéaire : cours et problèmes. McGraw-Hill, New York.

[42] Maeder, R. (1991). Programming in Mathematica, second edition. Addison-Wesley.

[43] Mett, C.L. et Smith J.C. (1986). Introduction au calcul différentiel et intégral. McGraw-Hill, Québec.

[44] Michel, P. (1989). Cours de mathématiques pour économistes. Economica, Paris, 2^e^ édition.

[45] Morrison, D.F. (1976) Multivariate statistical methods. McGraw-Hill, Tokyo.

[46] Noël, E. (1985). Le matin des mathématiciens. Belin-Radio France, Paris.

[47] Nougier, J.P. (1983). Méthode de calcul numérique. Masson, Paris.

[48] Piskounov, N. (1993). Calcul différentiel et intégral. Edition Marketing - Ellipses, Paris, 12^e^ édition.

[49] Poulalion, G. (1999). Les mathématiques de l'économiste : cours, applications, exercices corrigés. Vuibert, Paris.

[50] Pupion, G. et Poulalion, G. (1984). Mathématiques générales appliquées à l'économie et la gestion. Colin, Paris.

[51] Rao, C.R. and Mitra, S.K. (1971). Generalized inverse of matrices and applications. John Wiley, New York.

[52] Roure, F. et Butery, A. (1987). Mathématiques pour les sciences économiques et sociales. Presses Universitaires de France, Paris, 3^e^ édition.

[53] Sohravardi, S.Y. (1976). L'Archange empourpré: Quinze traités et récits mystiques, présentés et annotés par Henry Corbin. Fayard, Paris.

[54] Suter, H. (1965). Mathématiques modernes I. Éditions du Griffon, Neuchâtel.

[55] Suter, H. (1966). Mathématiques modernes II. Éditions du Griffon, Neuchâtel.

[56] Tricot, C. et Picard, J.-M. (1969). Ensembles et statistique. McGraw-Hill, Montréal.

[57] Varian, H. R. (1993). Economic and Financial Modeling with Mathematica. TELOS, Springer-Verlag, New-York.

[58] Weber, J.P. (1976). Mathematical Analysis : Business and Economic Applications. Harper & Row, New York.

[59] Wolfram, S. (1991). Mathematica, a system for doing mathematics by computer. Addison-Wesley.

[60] Wolfram, S. (1999). The Mathematica Book. Cambridge University Press.

# SITES INTERNET INTERESSANTS

**Mathématiques :**

http: //web.math.fsu.edu/Science/math.html
http: //archives.math.utk.edu/
http: //mathworld.wolfram.com/
http: //www.ams.org/mathweb
http: //www2.ac-lyon.fr/enseigne/math/panorama/panorama.html

**Mathematica :**

http: //www.wolfram.com/

# Index


Abscisse, 22
Accroissement, 70, 79
Aire,
calcul d'une, 130
entre deux courbes, 130, 139
négative, 134
orientée, 134
totale, 135
Alembert,
Jean Le Rond d', 244
règle de d', 163, 169
Archimède, 337
Asymptote,
définition, 106
horizontale, 108
oblique, 109
verticale, 67, 107

Base,
canonique, 278
définition, 278
orthogonale, 278
orthonormale, 278
Bijection, 13

Calcul,
différentiel, 47
inverse d'une matrice, 235
matriciel, 215
Calculatrice,
analytique, 322
numérique, 322
Cardinalité d'un ensemble, 8
Cauchy,
critère de, 54
suite de, 54
Cauchy-Schwarz
inégalité de, 273
Changement de variables, 125
Coût,
marginal, 113, 128, 147, 193
moyen, 113
Cofacteur, 233, 234
Combinaison linéaire, 275
Commande, 323
Concavité, 94
Constante,
arbitraire, 9
d'intégration, 122
numérique, 9
Continuité,
à droite, 66
à gauche, 66
d'une fonction de deux variables, 187
définition, 65
Contrainte, 200
Convergence,
d'une série, 156
d'une suite, 51
d'une suite,

critère de, 54
Convexité, 94
Coordonnée, 21
Cosinus, 36
Croissance,
d'une fonction, 87
d'une suite, 48

Décroissance,
d'une fonction, 88
d'une suite, 48
Dérivée,
applications, 87
applications économiques, 113
d'ordre supérieur, 79
d'un produit, 76
d'un quotient, 77
d'une composition de fonctions, 77
d'une somme, 76
définition, 71
interprétation géométrique, 73
logarithmique, 78
partielle, 189, 294
application économique de, 193
Dérivabilité,
d'une fonction, 72
à droite, 72
à gauche, 72
Dérivation,
règle générale de, 72
Déterminant,
d'une matrice, 230, 232
propriétés du, 234
Diagonalisation, 286
propriétés, 288
Diagramme de Venn, 7
Différentielle,
définition, 79
Dimension d'un espace vectoriel, 276
Discontinuité,
finie, 67
infinie, 67
réparable, 68
Divergence,
d'une série, 156
d'une suite, 52
Domaine de définition, 104, 105, 186
Droite,
équation, 22
application économique, 39
définition, 22
intersection, 25
parallèle, 24
pente d'une, 24
sécante, 24

Elément,
d'un ensemble, 4
d'une matrice, 215
Ensemble,
complémentaire, 6
d'arrivée, 10
définition, 4
de départ, 10
de parties, 8
différence, 5
fini, 8
intersection, 5
réunion, 5
sous-, 4
propre, 4
universel, 4
vide, 4
Equation,
d'une droite, 22

normale, 313
Equilibre du marché, 29
Espace vectoriel, 276
Estimateur des moindres carrés, 313
Euclide, 20
Euler,
Leonhard, 212
Excédent,
du consommateur, 142
du producteur, 144

Fonction(s),
étude complète d'une, 104
bijective, 13, 15
composition de deux, 12
concave, 94
continue, 65
convexe, 94
croissante, 88
d'offre, 28
décroissante, 88
définition, 11
dérivable, 72
de coût, 113, 193
de demande, 28
de deux variables, 186
de plusieurs variables, 186
différence de deux, 12
explicite, 15
exponentielle, 35
graphe d'une, 110
hyperbole, 32
hyperbolique, 38
impaire, 105
implicite, 16
injective, 13, 14
inverse, 15
limite d'une, 57
logarithmique, 35
périodique, 38
paire, 105
parabole, 31
polynomiale, 31
produit de deux, 12
puissance, 33
quotient de deux, 12
réciproque, 15
rationnelle, 32
schéma, 14
somme de deux, 12
surjective, 12, 14
trigonométrique, 36
visualisation de, 323
Forme,
indéfinie, 10
indéterminée, 10, 63, 99
normale d'une matrice, 247

Graphe,
d'une fonction, 110
d'une fonction de deux variables, 188

Hesse,
Ludwig Otto, 318
Hessienne,
matrice, 298
Hospital,
règle de l', 100

Image, 11
Indéterminée (forme),, 99
Injection, 13
Intégrale(s),
définie, 132
applications, 142
propriétés, 137

théorème fondamental, 132
double, 205
impropre, 141
indéfinie, 122
applications, 128
propriétés, 123
table d', 123
Intégration,
constante d', 122
par changement de variable, 125
par parties, 126
Intérêt composé, 42
Intervalle,
ferm , 5
ouvert, 5
semi-ouvert, 5
Inverse,
d'une fonction, 15
d'une matrice, 235
propriétés, 238
d'une matrice partagée, 238

Khayyam, 338
Khwarizmi, 46, 338

Lagrange,
Joseph Louis, 292
multiplicateurs de, 200, 306
Leibniz,
critère de, 166
Gottfried Willhelm, 184
Limite,
d'une fonction,
à droite, 60
à gauche, 60
à l'infini, 56
en un point, 58
infinie, 59
propriétés de la, 62
d'une suite, 51
Linéaire,
combinaison, 275
dépendance, 273
modèle, 312
Logarithme, 35
Logarithmique (fonction), 35
Logiciel, 322
Longueur d'un vecteur, 270

Maclaurin,
série de, 176
Mathematica (logiciel), 321
Matrice(s),
éléments d'une, 215
adjointe, 235
anti-symétrique, 224
augmentée, 252
carrée, 216
définition, 215
déterminant d'une, 230
définition, 232
par les cofacteurs, 233
propriétés, 234
de coefficients, 251
diagonale, 224
diagonale d'une, 223
diagonalisable, 286
diagonalisation d'une, 286
hessienne, 298
bordée, 306
idempotente, 241
identité, 223
inverse d'une, 235
propriétés, 238
non singulière, 236
nulle, 222

ordre d'une, 216
partagée, 227
addition de, 227
inverse d'une, 238
multiplication de, 228
transposée de, 230
produit de, 218
régulière, 236
rang d'une, 245
scalaire, 224
singulière, 236
somme de, 216
sous-, 226, 245
symétrique, 223
trace d'une, 225
transposée d'une, 221
triangulaire, 224
valeur propre d'une, 282
vecteur propre d'une, 282
Maximum et minimum
d'une fonction de
deux variables, 195
plusieurs variables, 298
Maximum,
absolu, 89
relatif, 89
Mineur principal, 298, 307
Minimum,
absolu, 89
relatif, 89
Minkowsky,
inégalité de, 273
Moindres carrés,
méthode des, 312
Multiplicateurs de Lagrange, 200, 306

Newton,
Isaac Sir, 152
Norme d'un vecteur, 270

Opération sur les matrices,
addition, 216
multiplication, 218
par un scalaire, 220
transformations élmentaires, 247
Ordonnée, 22
Ordre d'une matrice, 246
Origine, 21

Paires ordonnées, 10
Parabole, 31
Paramètre, 9, 22, 324
Parité d'une fonction, 105
Partition des matrices, 226
Pente d'une droite, 24, 73
Permutation, 231
Plan tangent, 196
Point d'inflexion, 97
Point-selle, 196, 197
Polynôme, 283
Productivité marginale, 194
Produit,
cartésien, 8
scalaire, 271
Profit,
en régime de monopole, 115
total, 147
Ptolémée, 337
Pythagore, 336

Quadrant, 21

Récurrence,
démonstration par, 155
hypothèse de, 155
Régression linéaire simple, 312

Raison d'une suite, 49
Ramanujan,
  Srinivasa Aiyangar, 334
Rang,
  complet, 246
  d'un produit de matrices, 251
  d'une matrice, 245
    augmentée, 252
Relation,
  binaire, 10
  domaine de la, 10
Revenu marginal, 114, 129, 147

Série,
  à termes positifs, 160
  alternée, 165
  convergente, 156
    absolument, 168
  critère de convergence, 160
  définition, 153
  de Maclaurin, 176
  de puissances, 170, 173
  de Taylor, 178
  divergente, 156
  finie, 153
  géométrique, 158
  harmonique, 161, 166
  infinie, 154
  semi-convergente, 168
  somme de la, 156
  terme général d'une, 154
Scalaire,
  matrice, 224
  produit, 271
Segment orienté, 268
Sinus, 36
Solution,
  infinité, 258
  infinité de, 260
  multiple, 256
  non triviale, 263
  pas de, 256, 258, 261
  triviale, 262, 263
  unique, 253, 258
Suite,
  alternée, 48
  atihmétique, 49
  bornée, 49
  convergente, 51
  définition, 48
  divergente, 51
  finie, 48
  géométrique, 50
  infinie, 48
  monotone, 48
    croissante, 48
    décroissante, 48
  oscillante, 53
  raison d'une, 49, 50
  terme général d'une, 48
Surface, 188
Surjection, 12
Système,
  compatible, 252
  d'équations linéaires, 251
  de coordonnées, 21, 187
  homogène, 262
  incompatible, 252

Tableau de variation, 105, 110
Taylor,
  série de, 178
Terme général,
  d'une série, 154
  d'une suite, 48
Test de comparaison, 165

Trace d'une matrice, 225
Transformations élémentaires, 247

Valeur,
- absolue, 9
- propre, 282, 286

Variable,
- continue, 9
- définition, 9
- dépendante, 10, 15
- discrète, 9
- indépendante, 10, 15

Vecteur(s),
- addition de deux, 269
- combinaison linéaire de, 275
- définition, 267
- dépendants, 274
- de base, 278
- interprétation géométrique des, 268
- longueur d'un, 270
- nul, 268
- orthogonaux, 272
- orthonormaux, 272
- produit scalaire de deux, 271
- propre, 282
- propriétés, 276
- unité, 267

Vecteur,
- colonne, 216
- des constantes, 251
- des inconnues, 251
- ligne, 216

Vectoriel,
- espace, 276
  - dimension d'un, 276, 277

Venn,
- diagramme de, 7